

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
INSTITUTO DE FÍSICA

# Equações de Schrödinger Estocásticas aplicadas a uma Medida Quântica Não-Demolidora

Fabio Mibielli Peixoto

Dissertação realizada sob a orientação do Prof.  
Luiz Davidovich, apresentada ao Instituto de  
Física da PUC, em preenchimento parcial dos re-  
quisitos para a obtenção do título de Mestre em  
Física.

Rio de Janeiro  
Agosto de 1995

# RESUMO

Nos últimos anos tem surgido um grande interesse nas chamadas equações de Schrödinger estocásticas. Isso porque ela nos permite resolver equações mestras, muito comuns em ótica quântica, de uma maneira bem mais simples e rápida. A razão disso é que as equações mestras lidam com operadores densidade ( $N^2$  variáveis, onde  $N$  é a dimensão do espaço de Hilbert), enquanto que as equações de Schrödinger estocásticas lidam com o vetor de estado do sistema ( $N$  variáveis). Tem-se então uma grande recompensa computacional, especialmente quando  $N$  é grande.

Em nossa tese são apresentadas as duas abordagens mais utilizadas: o método de Monte Carlo, que foi proposto por J.Dalibard, Y.Castin e K.Mølmer e o método de difusão proposto por N.Gisin e I.C.Percival. Apresentamos também uma proposta recente de medida quântica não-demolidora (medida QND) do número de fótons de uma cavidade. Aplicamos a ela os dois métodos e com isso conseguimos compará-los, analisando as vantagens e desvantagens de cada um.

# ABSTRACT

In the last few years there has been a growing interest in the so called stochastic Schrödinger equations. They allow us to solve master equations, very usual in quantum optics, in a simpler and easier way. The reason for this is that master equations deal with density operators ( $N^2$  variables, where  $N$  is the dimension of the Hilbert space), while the stochastic Schrödinger equations deal with the state vector of the system ( $N$  variables). So there is a great computational advantage, specially when  $N$  is large.

In our thesis we introduce the two more usual approaches: the Monte Carlo method, that has been developed by J.Dalibard, Y.Castin e K.Mølmer and the diffusion method proposed by N.Gisin and I.C.Percival. We present also a recent proposal of a photon-number quantum non-demolition measurement (a QND measurement) in a cavity. We apply both methods to this problem, comparing them and analysing their relative advantages and disadvantages.

# AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Dr. Luiz Davidovich pela primorosa e paciente orientação,
- Ao amigo Alexander Mazolli Lisboa, o “Mazerda”, companheiro de tantas aventuras, pela inestimável ajuda na elaboração dos programas de computador,
- Ao amigo Tarso B.L. Kist pelas animadas discussões sobre a tese, Física e outras coisas mais...
- Aos amigos Luis André e Gustavo pelos animados bate-papos enquanto apreciávamos a maravilhosa vista da PUC...
- Ao CNPq e à CAPES pela ajuda de custo durante estes últimos dois anos.

# Contents

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Equações de Schrödinger Estocásticas</b>	<b>9</b>
2.1	O Método da Equação Mestra . . . . .	9
2.2	O Método de Monte Carlo . . . . .	13
2.3	O Modelo de Difusão . . . . .	17
2.4	A Interpretação dada por H.M.Wiseman e G.J.Milburn . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Medida Quântica Não-Demolidora do Número de Fótons</b>	<b>34</b>
3.1	O que é uma Medida Quântica Não-Demolidora? . . . . .	34
3.2	A Proposta de M.Brune et al. . . . .	36
<b>4</b>	<b>Aplicação dos Métodos</b>	<b>46</b>
4.1	O Modelo de Difusão . . . . .	46
4.2	O Método de Monte Carlo . . . . .	58
4.3	Análise e Comparação dos Resultados . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>O Método das Trajetórias Quânticas de H.J.Carmichael</b>	<b>69</b>
<b>B</b>	<b>O Processo de Wiener e o Cálculo de Itô</b>	<b>72</b>
<b>C</b>	<b>Derivação dos Operadores <math>L_1(t)</math> e <math>L_2(t)</math></b>	<b>76</b>

# List of Figures

2.1	Esquema experimental de uma medida heterodina. . . . .	28
3.1	Níveis de energia do átomo utilizado na medida QND. . . . .	44
3.2	Esquema experimental da medida QND. . . . .	45
4.1	Frequência das velocidades dos átomos em 32.000 amostras. . . . .	53
4.2	Evolução do estado coerente pelo modelo de difusão em uma única realização. . . . .	54
4.3	Distribuição inicial do campo na cavidade. . . . .	55
4.4	Estado do campo após a passagem de 50 átomos. . . . .	55
4.5	Estado do campo após a passagem de 100 átomos. . . . .	56
4.6	Estado do campo após a passagem de 150 átomos. . . . .	56
4.7	Evolução da variância do número de fótons em uma realização. . . . .	57
4.8	Evolução do estado coerente pelo método de Monte Carlo em uma única realização. . . . .	59
4.9	Distribuição inicial do campo na cavidade. . . . .	61
4.10	Estado do campo após a passagem de 500 átomos. . . . .	61
4.11	Estado do campo após a passagem de 1.000 átomos. . . . .	62
4.12	Estado do campo após a passagem de 2.000 átomos. . . . .	62
4.13	Estado do campo após a passagem de 3.000 átomos. . . . .	63
4.14	Evolução da variância do número de fótons em uma realização . . . . .	64
4.15	Frequência dos estados finais após 7.000 realizações, utilizando o Monte Carlo. . . . .	65

# Chapter 1

## Introdução

Os sistemas físicos em geral podem ser classificados em dois tipos: fechados ou abertos. No primeiro caso há conservação de energia, enquanto no segundo há dissipação. Diversos sistemas simples como oscilador harmônico, átomo de hidrogênio e outros são conservativos e por isso aplica-se a equação de Schrödinger usual. Porém quando se quer estudar sistemas quânticos mais complexos, como o decaimento espontâneo de um átomo, campos em cavidades etc, o processo de dissipação passa a ser relevante e não se pode mais utilizar o mesmo formalismo aplicado aos sistemas conservativos.

Há diversas maneiras de se incorporar a dissipação. Uma maneira é utilizar um Hamiltoniano não-Hermitiano. Outra, geralmente utilizada em ótica quântica, é através da equação mestra [1]. Ela nos dá a evolução de um *ensemble* (no sentido de termos um conjunto de estados puros: um estado mistura), ao contrário da equação de Schrödinger que nos dá a evolução de um único vetor de estado. No entanto já está sendo possível observar experimentalmente a evolução de um único elemento do *ensemble* em um meio dissipativo. Como exemplo temos a observação experimental de saltos quânticos na fluorescência de um único íon de três níveis ([2], [3]) e há propostas para se observar saltos no número de fótons excitados em um modo de uma cavidade de alto-Q ([4], [5]). Seria interessante então se houvesse uma equação que também pudesse ser aplicada a um único vetor de estado no caso de sistemas abertos.

Por outro lado o problema da medida na mecânica quântica não tem uma solução definitiva até hoje. Ele consiste em representarmos o processo de medida de um observável

através das leis da mecânica quântica. Segundo a interpretação de Copenhague, ao efetuarmos uma medida ocorre um colapso na função de onda do sistema. Esse colapso não segue a dinâmica de Schrödinger, pois é um processo irreversível e não-linear. Segundo Niels Bohr seria uma lei física à parte [6]. Esse processo físico imposto *ad hoc* não agradou a muitos, que tentaram formular maneiras alternativas de se resolver o problema. Uma das propostas foi a introdução de uma equação de Schrödinger estocástica ([7], ver apêndice B), isto é, uma equação não-linear para o vetor de estado com um termo aleatório. Em uma medida teríamos então o estado evoluindo continuamente para um autoestado, como se fosse um processo de difusão; não há colapso! Os resultados finais continuam concordando com os obtidos pela mecânica quântica usual.

Pensava-se que as equações de Schrödinger estocásticas eram apenas mais uma alternativa à interpretação de Copenhague, sem maiores implicações. Porém, em 1992, I.C.Percival sugeriu que elas poderiam ser utilizadas na solução de problemas com dissipação [8]. Em uma série de artigos ([9]-[11]), N.Gisin e I.C.Percival aplicaram o modelo de difusão para o estado quântico a uma série de casos.

Na mesma época, J.Dalibard, Y.Castin e K.Mølmer propuseram um método de Monte Carlo para o estudo da evolução de um vetor de estado em um sistema aberto ([12], [13]). Ao contrário do modelo de difusão, nesse método a evolução é descontínua, ocorrendo saltos aleatórios que se assemelham ao que é observado quando se acompanha um sistema continuamente (por exemplo, o decaimento espontâneo de um átomo). Ao mesmo tempo H.J.Carmichael, inspirado pela teoria da fotodetecção, propôs um método análogo, o qual ele denominou de “trajetórias quânticas” ([14], ver apêndice A).

A vantagem desses métodos com relação à equação mestra é que eles permitem um cálculo computacional mais fácil e mais rápido. Isso porque se o espaço de Hilbert tem dimensão  $N$ , então o método da equação mestra requer a solução de  $N^2$  equações, enquanto que um método baseado na evolução do vetor de estado requer a solução só de  $N$  equações. Outra vantagem é que a análise da evolução do vetor de estado permite uma visão física melhor do que está ocorrendo do que se estudássemos a evolução do operador densidade. Deve ficar claro, porém, que ambos os métodos são apenas duas maneiras diferentes de “abrirmos” a equação mestra e que quando é feita a média sobre o *ensemble*, os resultados



são sempre iguais.

A aplicação dos métodos a diversos sistemas físicos e sua comparação tem atraído a atenção de diversos pesquisadores nos últimos anos ([15], [16]-[20]). Em nossa tese iremos apresentar ambos os métodos e aplicá-los ao caso de uma medida quântica não-demolidora do número de fótons de uma cavidade. Poderemos então mostrar como se aplicam, analisar as vantagens e desvantagens de cada um e comparar seus resultados.

No capítulo 2 faremos uma breve descrição do método da equação mestra. Apresentaremos o método de Monte Carlo, o de difusão e por fim faremos um estudo à respeito da interpretação dada por H.M.Wiseman e G.J.Milburn a ambos. No capítulo 3 discutiremos o que é uma medida quântica não-demolidora (medida QND), apresentando a recente proposta de M.Brune *et al.* de medida QND do número de fótons de uma cavidade [4]. No capítulo 4 os dois métodos são aplicados a essa medida, sendo analisados e comparados os seus resultados. No capítulo 5 serão apresentadas as nossas conclusões finais.

## Chapter 2

# Equações de Schrödinger Estocásticas

### 2.1 O Método da Equação Mestra

Este é o método geralmente utilizado no estudo de sistemas dissipativos em ótica quântica. Na sua dedução supõe-se que temos um sistema  $S$  acoplado fracamente a um reservatório  $R$ . Esse reservatório pode ser interpretado como sendo um banho térmico ou até mesmo um instrumento de medida. Ele é o responsável pela evolução irreversível de  $S$ , o que representa a dissipação presente. Considera-se, porém, que o sistema total  $S + R$  conserva a energia.

A equação mestra nos dá a evolução do operador densidade reduzido do sistema. Não se estuda a evolução do vetor de estado, pois, mesmo se começarmos com um estado puro, logo teremos um estado mistura devido à dissipação. Isso porque há perda de informação, logo não sabemos mais exatamente em que estado o sistema  $S$  está. Toma-se o operador densidade *reduzido*, pois só queremos estudar a evolução do sistema  $S$ . Para isso faz-se um traço nas variáveis de  $R$  eliminando-as, o que acarreta numa perda de informação a respeito das correlações entre  $S$  e  $R$ .

Um estudo semelhante pode ser encontrado na mecânica clássica no tratamento do movimento Browniano. Nesse caso temos uma partícula pesada em um meio (gás ou líquido), onde é bombardeada por diversas partículas leves. O estudo da evolução da função de

distribuição  $\rho(\vec{r}, \vec{p})$ , descrevendo a posição e o momento linear da partícula, pode ser feito considerando-se o meio como sendo um reservatório [1].

Uma aproximação importante que sempre é feita na dedução das equações mestras é a suposição de que o sistema é Markoviano, isto é, a evolução de suas variáveis só dependem do instante presente e não do passado; não há efeitos de “memória”. Em um artigo de 1976 [21], G.Lindblad chegou a uma forma geral para uma equação mestra Markoviana com um superoperador de Liouville limitado:

$$\frac{d\rho}{dt}(t) = \mathcal{L}\rho,$$

$$\mathcal{L}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho(t)] + \sum_{n=1}^m (L_n \rho(t) L_n^\dagger - \frac{1}{2} L_n^\dagger L_n \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) L_n^\dagger L_n). \quad (2.1)$$

onde

$\mathcal{L}$ : superoperador de Liouville,

$\rho$ : operador densidade reduzido do sistema,

$H$ : Hamiltoniano do sistema,

$L_n$ : operadores de relaxação.

Esta forma geral coincide com o fato empírico de que as equações mestras sempre podiam ser colocadas dessa maneira após alguns ajustes.

O número de operadores de relaxação depende do tipo de acoplamento do sistema com o reservatório. Pela equação (2.1) podemos ver que se eles forem todos nulos, retomamos a equação de von Neumann, que é válida para sistemas conservativos. Nesse caso, um estado puro permanece sempre um estado puro. Isso é facilmente deduzido usando-se a equação de von Neumann e a propriedade de que o operador densidade  $\rho$  representa um estado puro se e somente se é idempotente, isto é:

$$\rho^2(t) = \rho(t). \quad (2.2)$$

Uma característica de qualquer operador densidade é que seu traço é unitário ( $Tr[\rho] = 1$ ). Logo, por (2.2), outra propriedade de um estado puro é que:

$$Tr[\rho^2(t)] = 1. \quad (2.3)$$

A derivada temporal de  $Tr[\rho^2(t)]$  é dada por:

$$\frac{dTr[\rho^2(t)]}{dt} = 2Tr[\rho(t) \frac{d\rho}{dt}(t)], \quad (2.4)$$

onde utilizamos a propriedade cíclica e de linearidade do traço.

Através da equação de von Neumann

$$\frac{d\rho}{dt}(t) = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho(t)], \quad (2.5)$$

calculamos (2.4):

$$\rho(t) \frac{d\rho}{dt}(t) = -\frac{i}{\hbar}(\rho(t)H\rho(t) - \rho^2(t)H). \quad (2.6)$$

Aplicando (2.6) em (2.4) e utilizando novamente a propriedade cíclica do traço, obtemos:

$$\frac{dTr[\rho^2(t)]}{dt} = 0. \quad (2.7)$$

Logo vemos que a dinâmica de um sistema conservativo conserva o  $Tr[\rho^2]$  e com isso um estado puro permanece sempre puro.

Em um sistema aberto, no entanto, a dinâmica do operador densidade passa a ser dada pela equação mestra (2.1). Multiplicando (2.1) por  $\rho(t)$  e tomando o traço, teremos que (2.4) será dado por:

$$\frac{dTr[\rho^2(t)]}{dt} = 2 \sum_{n=1}^m \{ Tr[L_n^\dagger \rho(t) L_n \rho(t)] - Tr[L_n^\dagger L_n \rho^2(t)] \} \neq 0 \quad (2.8)$$

Pela equação (2.8) podemos ver então que em um sistema dissipativo  $Tr[\rho^2]$  não é conservado. Logo um estado puro evolui rapidamente para um estado mistura. Esse é o principal motivo para não se estudar a evolução de um único vetor de estado nesses sistemas e sim o operador densidade.

Um ponto importante a se destacar a respeito da equação (2.1) é que a sua forma não é única [9]. Seja um conjunto de  $m$  operadores de relaxação  $L_n$  e um outro com  $k$  operadores  $J_n$  relacionados da seguinte forma (transformação ortogonal):

$$L_n = \sum_i \beta_{ni} J_i, \quad (2.9)$$

onde

$$\sum_n \beta_{ni} \beta_{nj}^* = \delta_{ij}. \quad (2.10)$$

Aplicando (2.9) e (2.10) em (2.1):

$$\frac{d\rho}{dt}(t) = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho(t)] + \sum_{i=1}^k [J_i \rho(t) J_i^\dagger - \frac{1}{2} J_i^\dagger J_i \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) J_i^\dagger J_i]. \quad (2.11)$$

Temos então que os operadores de relaxação não são unicamente definidos.

## 2.2 O Método de Monte Carlo

Como já vimos, em um sistema dissipativo um estado puro evolui para um estado misto devido à perda de informação. Se pudéssemos recuperá-la, poderíamos acompanhar a evolução de um único vetor de estado, ao invés de só podermos estudar o operador densidade. Baseados nessa idéia, podemos entender como funcionam os modelos estocásticos.

No caso particular do método de Monte Carlo, temos a evolução do vetor de estado por um Hamiltoniano não-Hermitiano, intercalada por “saltos quânticos” aleatórios. Esses “saltos” podem ser interpretados como sendo experimentos *gedanken* que recuperariam a informação perdida. Como exemplo, no estudo do decaimento espontâneo de um átomo, esses experimentos poderiam ser representados por fotocélulas ideais espalhadas por todo o espaço, que indicariam sempre quando um fóton foi emitido. Na seção 2.4 analisaremos melhor essa interpretação. Esse processo de evolução, quando repetido muitas vezes, gera um *ensemble* de estados finais, sobre os quais são calculadas as grandezas físicas de interesse.

Para a aplicação do método, basta que seja conhecida a equação mestra do problema (2.1). Constrói-se então um Hamiltoniano não-Hermitiano  $\mathcal{H}$  da seguinte forma [13]:

$$\mathcal{H} = H - \frac{i\hbar}{2} \sum_{n=1}^m L_n^\dagger L_n. \quad (2.12)$$

onde  $H$  é o Hamiltoniano do sistema.

Supomos o vetor de estado  $|\psi(t)\rangle$  normalizado. O seu valor após um instante  $dt$  será dado por:

$$|\tilde{\psi}(t+dt)\rangle = \left(1 - \frac{i\mathcal{H}dt}{\hbar}\right)|\psi(t)\rangle. \quad (2.13)$$

Consideramos em (2.13) a expansão do operador de evolução temporal  $e^{-i\mathcal{H}dt/\hbar}$  até a primeira ordem em  $dt$ . Nota-se que como  $\mathcal{H}$  é não-Hermitiano, então o vetor dado por (2.13) não é normalizado (indicado pelo sinal sobre o psi). Sua norma ao quadrado é dada por:

$$\langle\tilde{\psi}(t+dt)|\tilde{\psi}(t+dt)\rangle = \langle\psi(t)|(1 + \frac{i\mathcal{H}^\dagger dt}{\hbar})(1 - \frac{i\mathcal{H}dt}{\hbar})|\psi(t)\rangle, \quad (2.14)$$

$$\equiv 1 - \delta p, \quad (2.15)$$

onde

$$\delta p = \frac{i}{\hbar} dt \langle\psi(t)|\mathcal{H} - \mathcal{H}^\dagger|\psi(t)\rangle. \quad (2.16)$$

No cálculo de (2.16) desprezamos termos de  $O[(dt)^2]$ . Aplicando (2.12) a (2.16) temos:

$$\delta p \equiv \sum_{n=1}^m \delta p_n, \quad (2.17)$$

onde

$$\delta p_n = dt \langle \psi(t) | L_n^\dagger L_n | \psi(t) \rangle \geq 0. \quad (2.18)$$

Para que essa expansão até primeira ordem em  $dt$  seja válida, devemos ter  $\delta p \ll 1$ .

Podemos facilmente dar uma interpretação a  $\delta p$ . Temos pela equação (2.18) que  $\delta p_n$  é proporcional ao módulo quadrado do vetor de estado  $L_n |\psi(t)\rangle$ . Logo pode ser interpretado como sendo a probabilidade de que o estado do sistema colapse para **esse** vetor. Então, pela equação (2.17),  $\delta p$  é a probabilidade de que haja **algum** colapso no sistema.

Após termos calculado o vetor de estado em  $t+dt$ , devemos sortear uma variável aleatória  $r$  (daí o nome de Monte Carlo), uniformemente distribuída no intervalo  $[0, 1]$ , para sabermos se houve ou não um “salto quântico”. Podemos ter dois casos:

1.  $\delta p < r \implies$  NÃO HÁ “salto quântico”.

O vetor de estado normalizado será dado por, utilizando a equação (2.15):

$$|\psi(t+dt)\rangle = \frac{|\tilde{\psi}(t+dt)\rangle}{\sqrt{1-\delta p}}. \quad (2.19)$$

Esse será o caso mais freqüente visto que  $\delta p \ll 1$ .

2.  $\delta p > r \implies$  HÁ “salto quântico”.

Se tivermos mais de um operador de relaxação diferente, devemos escolher o novo vetor de estado normalizado segundo a probabilidade  $P_j = \delta p_j / \delta p$  ( $\sum_{n=1}^m P_n = 1$ , devido à equação (2.17)). Para isso sorteamos outra variável aleatória  $q$  e comparamo-na com  $P_1, P_1 + P_2, \dots, P_1 + \dots + P_m$ . Temos então que se:

$$P_1 + \dots + P_j > q \implies |\psi(t+dt)\rangle = \frac{L_j |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\frac{\delta p_j}{dt}}}. \quad (2.20)$$

com  $j \in \{1, \dots, m\}$

onde usamos a equação (2.18) para a normalização.

Dada então a equação mestra (2.1) de um problema, o método de Monte Carlo nos dá uma maneira simples de evoluirmos o vetor de estado. Para cada evolução, ou realização

como também pode ser chamado, obtem-se um vetor diferente em um dado instante  $t$ . O valor médio das grandezas físicas será dado pela média aritmética sobre esses diversos vetores:

$$\langle A \rangle_{(n)}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \psi_i(t) | A | \psi_i(t) \rangle. \quad (2.21)$$

onde

$A$ : operador,

$n$ : número de realizações.

Temos então que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle A \rangle_{(n)}(t) = \langle A \rangle(t), \quad (2.22)$$

onde  $\langle A \rangle(t)$  é o valor médio de  $A$  dado pela equação mestra (2.1), como será mostrado adiante.

Quando o estado inicial  $\rho(0)$  não for um estado puro e sim uma mistura  $\rho(0) = \sum_i p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|$ , o único cuidado que se deve tomar é que o estado inicial deve ser sorteado obedecendo às probabilidades  $\{p_i\}$ . O método de sorteio é o mesmo utilizado na equação (2.20).

Outro cuidado que se deve tomar é com o tamanho do passo  $dt$ . Ele não pode ser muito grande, pois queremos  $\delta p \ll 1$ , mas também não pode ser muito pequeno. Isso porque toda equação mestra é deduzida na aproximação de que o intervalo de tempo ( $dt$ ) para se haver uma mudança significativa é muito maior do que o tempo de correlação do sistema com o reservatório ( $\tau_c$ ). Então, para termos resultados confiáveis, devemos ter  $dt \gg \tau_c$  [13].

Não se pode derivar o método de Monte Carlo a partir da equação mestra, porém a sua equivalência é facilmente obtida. Suponhamos que no instante inicial  $t = 0$ , tenhamos um estado puro  $\rho(0) = |\psi(0)\rangle \langle \psi(0)|$  (a extensão para o caso de um estado mistura é trivial). Iremos calcular o operador densidade médio  $\bar{\sigma}$  no instante  $t + dt$ . Ele será dado por uma média ponderada, onde utilizamos (2.19) e (2.20):

$$\bar{\sigma}(t + dt) = (1 - \delta p) \frac{|\tilde{\psi}(t + dt)\rangle \langle \tilde{\psi}(t + dt)|}{\sqrt{1 - \delta p} \sqrt{1 - \delta p}} + \delta p \sum_{n=1}^m P_n \frac{L_n |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| L_n^\dagger}{\sqrt{\frac{\delta p_n}{dt}} \sqrt{\frac{\delta p_n}{dt}}}. \quad (2.23)$$

Aplicando (2.13) em (2.23), desconsiderando termos  $O[(dt)^2]$  e sabendo que



$P_n = \delta p_n / \delta p$ , temos:

$$\bar{\sigma}(t + dt) = \left(1 - \frac{i\mathcal{H}dt}{\hbar}\right) |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \left(1 + \frac{i\mathcal{H}^\dagger dt}{\hbar}\right) + dt \sum_{n=1}^m L_n |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| L_n^\dagger, \quad (2.24)$$

$$\sigma(t) \equiv |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|. \quad (2.25)$$

Usando (2.25) em (2.24):

$$\bar{\sigma}(t + dt) = \sigma(t) + \frac{idt}{\hbar} [\sigma(t)\mathcal{H}^\dagger - \mathcal{H}\sigma(t)] + dt \sum_{n=1}^m L_n \sigma(t) L_n^\dagger. \quad (2.26)$$

Aplicando agora (2.12) em (2.26) temos:

$$\bar{\sigma}(t + dt) = \sigma(t) - \frac{idt}{\hbar} [H, \sigma(t)] + dt \sum_{n=1}^m [L_n \sigma(t) L_n^\dagger - \frac{1}{2} L_n^\dagger L_n \sigma(t) - \frac{1}{2} \sigma(t) L_n^\dagger L_n]. \quad (2.27)$$

Tomando uma nova média em (2.27) sobre os possíveis valores de  $\sigma(t)$ :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \bar{\sigma}(t)] + \sum_{n=1}^m [L_n \bar{\sigma}(t) L_n^\dagger - \frac{1}{2} L_n^\dagger L_n \bar{\sigma}(t) - \frac{1}{2} \bar{\sigma}(t) L_n^\dagger L_n]. \quad (2.28)$$

A equação (2.28) é idêntica à equação (2.1). Logo se tivermos  $\sigma(0) = \rho(0)$ , teremos  $\bar{\sigma}(t) = \rho(t)$  para todo instante. Os valores calculados sobre um *ensemble* no método de Monte Carlo serão então iguais aos dados pela equação mestra, como era de se esperar.

## 2.3 O Modelo de Difusão

Assim como o método de Monte Carlo, para a aplicação do modelo de difusão basta que saibamos a equação mestra do problema (2.1). A evolução do vetor de estado será dada então por uma equação diferencial estocástica não-linear na forma diferencial de Itô ([10], ver apêndice B):

$$|d\psi\rangle = -\frac{i}{\hbar}H|\psi(t)\rangle dt + \sum_{n=1}^m [\langle L_n^\dagger L_n - \frac{1}{2}L_n^\dagger L_n - \frac{1}{2}\langle L_n^\dagger \rangle \langle L_n \rangle] |\psi(t)\rangle dt + \sum_{n=1}^m [L_n - \langle L_n \rangle] |\psi(t)\rangle d\xi_n, \quad (2.29)$$

onde

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle &= 1, \\ \langle L_n \rangle &\equiv \langle \psi(t) | L_n | \psi(t) \rangle, \\ |\psi(t+dt)\rangle &\equiv |\psi(t)\rangle + |d\psi\rangle. \end{aligned} \quad (2.30)$$

As variáveis aleatórias  $\{d\xi_n\}$  são processos de Wiener (ver apêndice B). Elas são complexas, independentes entre si e satisfazem às seguintes propriedades:

$$\overline{d\xi_n} = 0, \quad (2.31)$$

$$\overline{d\xi_n d\xi_m} = 0, \quad (2.32)$$

$$\overline{d\xi_n^* d\xi_m} = \delta_{nm} dt, \quad (2.33)$$

onde a barra significa uma média sobre a densidade de probabilidade. A cada novo incremento  $dt$  deve-se sortear um novo  $d\xi_n$  para cada operador de relaxação  $L_n$ . Pelas equações (2.31) e (2.33), temos que a distribuição Gaussiana de  $\{d\xi_n\}$  possui média nula e variância  $dt/2$ . Temos então, pela equação (2.29), que por esse método a evolução do vetor de estado é contínua e irreversível, ao contrário do método de Monte Carlo que possui discontinuidades na evolução (devido aos “saltos”). As flutuações aleatórias, por causa da interação do sistema com o meio, ocorrem a todo instante e são representadas pela segunda soma em (2.29).

Para calcularmos o valor médio de uma grandeza física num dado instante  $t$ , procede-se do mesmo modo já descrito para o método de Monte Carlo: constrói-se um *ensemble* de

estados nesse instante, toma-se o valor médio da grandeza para cada elemento e depois toma-se a média aritmética de todos esses valores (2.21).

Ao contrário do método de Monte Carlo, o modelo de difusão pode ser derivado a partir da equação mestra (2.1), partindo de poucas hipóteses [9]. Os autores do modelo de difusão, N.Gisin e I.C.Percival, argumentam que esta seria uma vantagem sobre o método de Monte Carlo. Na nossa opinião, isso não se constitui realmente em uma vantagem, quando o objetivo for resolver problemas. Pois, para isso, basta que os métodos sejam equivalentes à equação mestra, o que ocorre. Essa vantagem seria verdade se estivéssemos preocupados com problemas de fundamentos da mecânica quântica (teoria da medida), o que não é o caso.

Já sabemos que um estado puro evolui para uma mistura em um meio dissipativo. Por isso não se pode ter uma equação determinística para o vetor de estado. Mas nada nos impede que haja uma equação estocástica. Tomemos a variação do vetor de estado com um termo aleatório:

$$|d\psi\rangle = |\Theta\rangle dt + \sum_n |\varphi_n\rangle d\xi_n. \quad (2.34)$$

O primeiro termo em (2.34) é um termo de “arrasto”, enquanto que o segundo representa as flutuações estocásticas devido à interação. Os processos de Wiener  $\{d\xi_n\}$  são complexos e impõem-se as propriedades (2.31) a (2.33).

Vamos ver que condição é imposta sobre os  $\{|\varphi_n\rangle\}$  se quisermos que a norma seja conservada:

$$\langle\psi(t+dt)|\psi(t+dt)\rangle - \langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 0, \quad (2.35)$$

onde

$$|\psi(t+dt)\rangle = |\psi(t)\rangle + |d\psi\rangle. \quad (2.36)$$

Utilizando a equação (2.34) em (2.36) e a propriedade (2.33), temos então:

$$\langle\psi(t+dt)|\psi(t+dt)\rangle - \langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \sum_n (\langle\psi(t)|\varphi_n\rangle d\xi_n + \langle\varphi_n|\psi(t)\rangle d\xi_n^*). \quad (2.37)$$

Para que a equação (2.37) seja compatível com a (2.35), devemos ter:

$$\langle\psi(t)|\varphi_n\rangle = 0. \quad (2.38)$$

A fim de calcularmos o termo de “arrasto” e o estocástico, tomaremos o operador densidade inicial representando um estado puro normalizado:

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|. \quad (2.39)$$

O caso geral segue diretamente devido à linearidade da equação mestra. A variação  $d\rho$  é dada por:

$$d\rho = \rho(t+dt) - \rho(t), \quad (2.40)$$

$$= [\overline{|\psi(t)\rangle + |d\psi\rangle}][\overline{\langle\psi(t)| + \langle d\psi|}] - |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|, \quad (2.41)$$

$$= [\overline{|\psi(t)\rangle\langle d\psi| + |d\psi\rangle\langle\psi(t)| + |d\psi\rangle\langle d\psi|}]. \quad (2.42)$$

A barra significa que é feita uma média sobre um *ensemble* de estados. Utilizando (2.31), (2.33) e (2.34) em (2.42) tem-se:

$$\frac{d\rho}{dt}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\Theta| + |\Theta\rangle\langle\psi(t)| + 2 \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|. \quad (2.43)$$

O termo estocástico é determinado pelas componentes de  $\frac{d\rho}{dt}(t)$  no espaço ortogonal a  $|\psi(t)\rangle$ , como se pode verificar aplicando (2.39) em (2.43):

$$(1 - \rho) \frac{d\rho}{dt}(1 - \rho) = 2 \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|. \quad (2.44)$$

O termo de “arrasto” é obtido aplicando-se (2.43) a  $|\psi(t)\rangle$ , levando em conta (2.38):

$$\frac{d\rho}{dt}(t)|\psi(t)\rangle = |\psi(t)\rangle\langle\Theta|\psi(t)\rangle + |\Theta\rangle, \quad (2.45)$$

$$\langle\psi(t)|\frac{d\rho}{dt}(t)|\psi(t)\rangle = \langle\Theta|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|\Theta\rangle. \quad (2.46)$$

Logo

$$Re\langle\psi(t)|\Theta\rangle = \frac{1}{2}\langle\psi(t)|\frac{d\rho}{dt}(t)|\psi(t)\rangle. \quad (2.47)$$

Aplicando (2.47) em (2.45) temos:

$$|\Theta\rangle = \frac{d\rho}{dt}(t)|\psi(t)\rangle - \left(\frac{1}{2}\langle\psi(t)|\frac{d\rho}{dt}(t)|\psi(t)\rangle + i\mathcal{C}\right)|\psi(t)\rangle, \quad (2.48)$$

onde  $i\mathcal{C}$  é a parte imaginária que é definida de modo que tenhamos a equação de Schrödinger na ausência de dissipação.

Iremos agora utilizar a equação mestra (2.1) para obtermos explicitamente os termos (2.44) e (2.48). Aplicando (2.1) em (2.44) e utilizando (2.2) e (2.39) temos:

$$2 \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| = \sum_n 2(1 - |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|)L_n|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|L_n^\dagger(1 - |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|). \quad (2.49)$$

O vetor que satisfaz a equação acima é dado por:

$$|\varphi_n\rangle = (L_n - \langle L_n \rangle) |\psi(t)\rangle, \quad (2.50)$$

onde  $\langle L_n \rangle \equiv \langle\psi(t)|L_n|\psi(t)\rangle$ .

Aplicando agora (2.1) em (2.48) tem-se:

$$|\Theta\rangle = -\frac{i}{\hbar}H|\psi(t)\rangle + \sum_n [\langle L_n^\dagger \rangle L_n - L_n^\dagger L_n - \langle L_n^\dagger \rangle \langle L_n \rangle] |\psi(t)\rangle, \quad (2.51)$$

onde impomos  $\mathcal{C} \equiv \langle H \rangle / \hbar$  para que tenhamos a equação de Schrödinger satisfeita na ausência de dissipação.

Colocando (2.50) e (2.51) em (2.34), obtemos (2.29). Logo, ao tomarmos uma média sobre um *ensemble*, os valores obtidos pela equação de difusão serão os mesmos dados pela equação mestra, já que, como acabamos de demonstrar, uma provém da outra.

## 2.4 A Interpretação dada por H.M.Wiseman e G.J.Milburn

Uma dúvida interessante que pode surgir é se os métodos de Monte Carlo e da difusão são meros algoritmos de cálculo ou se há algum sistema físico onde a evolução do vetor de estado realmente é dada por eles. A resposta veio através de um artigo em 1993 [22]. H.M.Wiseman e G.J.Milburn mostraram que, sob determinadas condições, eles podem ser interpretados como sendo a evolução de um estado condicionado, dada a história dos resultados de suas medidas. A diferença entre os dois resulta dos diferentes modos de se medir a radiação eletromagnética, que carrega informação a respeito da evolução do sistema.

Os métodos de medida correspondem respectivamente à *fotodeteção* e a uma *medida heterodina*. É essa possibilidade de recuperarmos a informação levada pelo banho, que permite-nos estudar a evolução do vetor de estado ao invés do operador densidade. A fim de verificarmos isso, iremos mais uma vez considerar sistemas governados pela equação mestra (2.1). Podemos separá-la em duas partes:

$$\frac{d\rho}{dt}(t) = \mathcal{L}_0\rho + \mathcal{D}\rho, \quad (2.52)$$

onde

$$\mathcal{L}_0\rho \equiv -\frac{i}{\hbar}[H, \rho(t)], \quad (2.53)$$

$$\mathcal{D}\rho = \mathcal{L}\rho - \mathcal{L}_0\rho. \quad (2.54)$$

Uma equação estocástica para a equação mestra (2.52) pode ser escrita da seguinte forma [22]:

$$d\rho_c(t) = \sum_{n=1}^m \left\{ p_c^n \left[ \frac{\mathcal{S}_n\rho_c(t)}{\langle L_n^\dagger L_n \rangle} - \rho_c(t) \right] + dt \left[ \langle L_n^\dagger L_n \rangle \rho_c(t) - \frac{1}{2} (L_n^\dagger L_n \rho_c(t) + \rho_c(t) L_n^\dagger L_n) \right] \right\} + \mathcal{L}_0\rho_c(t)dt, \quad (2.55)$$

onde

$p_c^n$ : n-ésima variável aleatória real,

$\mathcal{S}_n$ : n-ésimo superoperador de “salto”.

Definimos:

$$\mathcal{S}_n\rho \equiv L_n\rho L_n^\dagger, \quad (2.56)$$

$$\overline{p_c^n} \equiv \langle L_n^\dagger L_n \rangle dt = Tr[\mathcal{S}_n\rho_c(t)]dt, \quad (2.57)$$

$$(p_c^n)^2 = p_c^n \Leftrightarrow p_c^n \in \{0, 1\}. \quad (2.58)$$

A barra na equação (2.57) continua tendo o significado de ser uma média sobre um *ensemble*. O índice  $c$  significa que as quantidades estão condicionadas à história da evolução até o momento  $t$ . O operador densidade médio irá obedecer à equação mestra (2.1), como se pode ver tirando a média de (2.55), utilizando (2.57) e definindo  $\rho(t) \equiv \overline{\rho}_c(t)$ .

Pode-se agora “abrir” a equação mestra estocástica (2.55) em duas equações de Schrödinger estocásticas diferentes (a notação (2.30) continua válida):

$$1) |d\psi_c\rangle = \left\{ \sum_{n=1}^m [p_c^n \left( \frac{L_n}{\sqrt{\langle L_n^\dagger L_n \rangle}} - 1 \right) + \frac{dt}{2} (\langle L_n^\dagger L_n \rangle - L_n^\dagger L_n)] - \frac{i}{\hbar} H dt \right\} |\psi_c(t)\rangle, \quad (2.59)$$

correspondente ao **método de Monte Carlo**.

A primeira vista pode parecer que a equação (2.59) nada tem a ver com o método dado pelas equações (2.19) e (2.20). Veremos porém que elas são equivalentes.

Pela equação (2.58), temos que  $p_c^n$  em (2.59) representa se houve ou não um “salto quântico”. Suponhamos primeiramente que **não** há “salto” ( $p_c^n = 0 \forall n \in \{1, \dots, m\}$ ). Então, pela equação (2.59) teremos:

$$|d\psi_c\rangle = dt \left\{ \sum_{n=1}^m \frac{1}{2} [\langle L_n^\dagger L_n \rangle - L_n^\dagger L_n] - \frac{i}{\hbar} H \right\} |\psi_c(t)\rangle. \quad (2.60)$$

A equação correspondente no método de Monte Carlo é a (2.19). Aplicando (2.13) em (2.19) temos:

$$|\psi_c(t + dt)\rangle = \frac{(1 - \frac{iHdt}{\hbar})}{\sqrt{1 - \delta p}} |\psi_c(t)\rangle. \quad (2.61)$$

Utilizando (2.12), (2.30) e a expansão em Taylor de  $(1 - \delta p)^{-1/2}$  até  $O[dt]$  (lembremo-nos que  $\delta p \ll 1$ ) temos:

$$|\psi_c(t)\rangle + |d\psi_c\rangle \cong (1 + \frac{\delta p}{2}) (1 - \frac{i}{\hbar} H dt - \sum_{n=1}^m \frac{L_n^\dagger L_n}{2} dt) |\psi_c(t)\rangle, \quad (2.62)$$

Considerando agora (2.17) e (2.18) e desprezando termos  $O[(dt)^2]$ :

$$|d\psi_c\rangle \cong dt \left\{ \sum_{n=1}^m \frac{1}{2} [\langle L_n^\dagger L_n \rangle - L_n^\dagger L_n] - \frac{i}{\hbar} H \right\} |\psi_c(t)\rangle. \quad (2.63)$$

Temos então que a equação (2.63) é igual à equação (2.60).

Se tivermos um “salto”, este ocorrerá para um dos  $n \in \{1, \dots, m\}$ , isto é,  $p_c^i = 1$  e  $p_c^j = 0 \forall j \neq i$ . A equação (2.59) fica então:

$$|d\psi_c\rangle = \left\{ \left( \frac{L_i}{\sqrt{\langle L_i^\dagger L_i \rangle}} - 1 \right) + dt \sum_{n=1}^m \frac{1}{2} (\langle L_n^\dagger L_n \rangle - L_n^\dagger L_n) - \frac{i}{\hbar} H dt \right\} |\psi_c(t)\rangle, \quad (2.64)$$

$$|\psi_c(t + dt)\rangle = \frac{L_i}{\sqrt{\langle L_i^\dagger L_i \rangle}} |\psi_c(t)\rangle + dt \left\{ \sum_{n=1}^m \frac{1}{2} (\langle L_n^\dagger L_n \rangle - L_n^\dagger L_n) - \frac{i}{\hbar} H \right\} |\psi_c(t)\rangle, \quad (2.65)$$

onde utilizamos novamente (2.30). Há uma pequena diferença entre a equação (2.65) e a equação (2.20). É que em (2.65) o vetor de estado é colapsado no instante  $t$  e evolui de acordo com (2.60) até  $t + dt$ , enquanto que em (2.20) só se considera o colapso em  $t$ . Porém, como é muito pouco provável que haja dois colapsos seguidos ( $\delta p \ll 1$ ), os dois métodos acabam se tornando equivalentes após um longo intervalo de tempo  $\Delta t \gg dt$ .

$$2) |d\tilde{\psi}_c\rangle = dt \left\{ \sum_{n=1}^m \left[ \langle L_n^\dagger \rangle L_n - \frac{1}{2} L_n^\dagger L_n + L_n d\xi_n \right] - \frac{i}{\hbar} H \right\} |\tilde{\psi}_c(t)\rangle, \quad (2.66)$$

onde  $d\xi_n$  possui as mesmas propriedades (2.31)-(2.33). A equação (2.66) corresponde ao **modelo de difusão**. Nota-se, porém, que ela não tem os termos  $\langle L_n^\dagger \rangle \langle L_n \rangle$  e  $\langle L_n \rangle d\xi_n$  existentes em (2.29). A única consequência disso é que a evolução dada por (2.66) não conserva a norma (haja visto o sinal sobre psi). Como são termos escalares, geravam vetores paralelos a  $|\psi_c(t)\rangle$ , que mantinham a sua norma conservada. Veremos agora quais são os sistemas físicos que geram evoluções dadas por (2.59) e (2.66).

Seja um sistema ótico (um campo em uma cavidade, um átomo etc) que interaja com o banho através do seguinte Hamiltoniano [22]:

$$H_T(t) = H_s + i\hbar\sqrt{\gamma} [b^\dagger(t)a - b(t)a^\dagger], \quad (2.67)$$

$H_T$ : Hamiltoniano total,

$H_s$ : Hamiltoniano do sistema,

$\gamma$ : taxa de decaimento,

$b(t)$ : operador de aniquilação do banho,

$a$ : operador de aniquilação do sistema.

O banho será considerado como sendo todos os modos do campo eletromagnético no vácuo. Na aproximação de Markov tem-se [23]:

$$[b(t), b^\dagger(t')] = \delta(t - t'). \quad (2.68)$$



Iremos agora calcular a intensidade de radiação que escapa no instante  $t$  a uma distância  $x$  do sistema. Ela será dada por [22]:

$$I(x, t) = \text{Tr}[b(t - x/c) \sigma(t) b^\dagger(t - x/c)], \quad (2.69)$$

onde  $\sigma(t)$ : operador densidade do sistema + banho.

Não se pode aplicar a aproximação de Born ( $\sigma(t) \rightarrow \rho(t) \otimes \rho_B(0)$ , onde  $\rho$  é o operador densidade do sistema e  $\rho_B$  do banho) nesse ponto, pois com isso estaríamos “jogando fora” a informação levada pelo meio, que é justamente o que queremos recuperar. A evolução temporal de  $\sigma(t)$  é dada por:

$$\sigma(t + dt) = U(t + dt, t) \sigma(t) U^\dagger(t + dt, t), \quad (2.70)$$

onde  $U$  é o operador de evolução temporal.

Antes de efetuarmos os cálculos, devemos tomar cuidado com a expressão (2.68). Isso porque ela gera quantidades divergentes, como por exemplo  $\langle 0|b(t')b^\dagger(t)|0\rangle = \delta(t - t')$ . A maneira usual de se tratar esse problema é utilizando o cálculo estocástico de Itô ([23], ver apêndice B), onde define-se:

$$B(t) - B(t_0) \equiv \int_{t_0}^t b(t') dt', \quad (2.71)$$

$$dB(t) \equiv B(t + dt) - B(t). \quad (2.72)$$

Pela equação (2.68) temos que  $b(t)$  é um operador tipo “ruído branco” e por (2.71) vemos que  $B(t)$  nada mais é do que um processo de Wiener. Utilizando (2.68) e as definições (2.71) e (2.72), obtém-se facilmente:

$$[dB(t), dB^\dagger(t)] = dt. \quad (2.73)$$

Aplicando então (2.70) em (2.69) temos:

$$I(x, t) = \text{Tr}[b(t - x/c) U(t, t - x/c) \sigma(t - x/c) U^\dagger(t, t - x/c) b^\dagger(t - x/c)]. \quad (2.74)$$

O operador de evolução temporal é dado por:

$$U(t + dt, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_t^{t+dt} H_T(t') dt'}. \quad (2.75)$$

Aplicando (2.67) em (2.75), expandindo-o até  $O[(dt)^2]$  e utilizando (2.72) e (2.73) temos:

$$\begin{aligned}
U(t+dt, t) = & 1 - \frac{i}{\hbar} H_s dt + \sqrt{\gamma} (dB^\dagger(t)a - dB(t)a^\dagger) - \frac{H_s}{2\hbar} dt^2 - \frac{i\sqrt{\gamma}}{2} H_s (dB^\dagger(t)a - \\
& - dB(t)a^\dagger) dt - \frac{i\gamma}{2} (dB^\dagger(t)a - dB(t)a^\dagger) H_s dt + \frac{\gamma}{2} [(dB^\dagger)^2(t)a^2 + \\
& + dB^2(t)(a^\dagger)^2 - dB^\dagger(t)dB(t)(a^\dagger a + aa^\dagger) - a^\dagger a dt]. \tag{2.76}
\end{aligned}$$

Pode-se mostrar que o cálculo de Itô possui as seguintes regras de multiplicação para o estado do vácuo (esse é o estado do reservatório que irá nos interessar) [23]:

$$\begin{aligned}
dt^2 = dB^2 = (dB^\dagger)^2 = dB^\dagger(t)dB(t) &= 0, \\
dBdt = dB^\dagger dt = dt dB = dt dB^\dagger &= 0, \\
dB(t)dB^\dagger(t) &= dt. \tag{2.77}
\end{aligned}$$

Aplicando as regras (2.77) em (2.76), conseguimos reduzi-la a:

$$U(t+dt, t) = 1 - \frac{i}{\hbar} H_s dt + \sqrt{\gamma} (dB^\dagger(t)a - dB(t)a^\dagger) - \frac{\gamma}{2} a^\dagger a dt. \tag{2.78}$$

Iremos agora utilizar (2.78) para calcularmos (2.74). Como  $x/c \ll t$  em experiências feitas em laboratório, podemos considerá-lo como sendo um incremento de tempo ( $dt = x/c$ ). Com isso teremos:

$$\begin{aligned}
b(t-x/c)U(t, t-x/c) = & b(t-x/c) - \frac{i}{\hbar} b(t-x/c) H_s \frac{x}{c} + \sqrt{\gamma} [b(t-x/c) dB^\dagger(t-x/c) a - \\
& - b(t-x/c) dB(t-x/c) a^\dagger] - \frac{\gamma}{2} b(t-x/c) a^\dagger a \frac{x}{c}. \tag{2.79}
\end{aligned}$$

Os termos entre colchetes podem ser reescritos, em primeira aproximação, como:

$$[...] \cong [dB(t-x/c) dB^\dagger(t-x/c) a \frac{c}{x} - dB(t-x/c) dB(t-x/c) a^\dagger \frac{c}{x}]. \tag{2.80}$$

Aplicando (2.77) em (2.80):

$$[...] \cong a. \tag{2.81}$$

Conseguimos então simplificar bastante a expressão (2.79), utilizando (2.81) e desprezando os termos que contém  $dt = x/c$  perante os outros:

$$b(t-x/c)U(t, t-x/c) \cong b(t-x/c) + \sqrt{\gamma} a. \tag{2.82}$$

Aplicando (2.82) em (2.74):

$$I(x, t) = Tr\{ [b(t - x/c) + \sqrt{\gamma}a] \sigma(t - x/c) [b(t - x/c) + \sqrt{\gamma}a]^\dagger \}. \quad (2.83)$$

Agora podemos utilizar a aproximação de Markov em (2.83), que consiste em substituímos  $\sigma(t - x/c) \rightarrow \rho(t - x/c) \otimes \rho_B(0)$  e tomarmos o traço nas variáveis do banho. Devemos nos lembrar que o banho está no estado do vácuo e que por isso  $b|0\rangle = 0$ . Teremos então:

$$I(x, t) = \gamma Tr[ a \rho(t - x/c) a^\dagger ], \quad (2.84)$$

onde  $\rho$  é o operador densidade do sistema.

Logo, conseguimos obter, após algumas aproximações, uma expressão para a intensidade de radiação emitida que depende apenas das variáveis do sistema (bem diferente do que tínhamos inicialmente em (2.69)).

A fim de medirmos essa intensidade, supomos um fotodetector com eficiência  $\eta$  colocado na posição  $x$ . No intervalo de tempo  $(t, t + dt)$  ele irá detectar ou não um fóton. A probabilidade de detectá-lo, na teoria semi-clássica, é dada por:

$$P(x, t)dt = \eta I(x, t)dt. \quad (2.85)$$

Aplicando (2.84) a (2.85):

$$P(x, t)dt = \eta Tr[\mathcal{S}\rho(t - x/c)]dt, \quad (2.86)$$

onde  $\mathcal{S}\rho(t - x/c) \equiv \gamma a \rho(t - x/c) a^\dagger$  é o operador de “salto” já definido em (2.56).

Se um fóton for detectado, o operador densidade passará a ser dado por:

$$\rho_c(t - x/c + dt) = \frac{\eta \mathcal{S}\rho(t - x/c)}{P(x, t)}. \quad (2.87)$$

Nota-se que uma detecção em  $t$  causa uma mudança no sistema em  $t - x/c$ . Isso porém não corresponde a uma quebra da causalidade, pois esses “saltos” na verdade significam mais uma mudança no nosso conhecimento a respeito do sistema do que um “salto quântico” no sentido original proposto por Niels Bohr [22].

Se não houver uma fotodetecção em  $(t, t + dt)$ , a evolução do operador densidade será dada pela equação mestra (2.52). O operador de relaxação, segundo (2.56) e (2.86), será:

$$L = \sqrt{\gamma} a, \quad (2.88)$$

A variação no número de fótons no intervalo  $(t, t + dt)$  pode ser dada por uma variável aleatória que obedeça às seguintes regras:

$$\bar{p}_c = P_c dt = \eta \text{Tr}[\mathcal{S}\rho_c(t)], \quad (2.89)$$

$$p_c^2 = p_c. \quad (2.90)$$

Nota-se que as regras (2.89) e (2.90) são idênticas a (2.57) e (2.58). Assim sendo, podemos escrever uma equação estocástica para  $\rho_c(t)$  impondo a condição de que  $\bar{p}_c(t)$  obedeça à equação mestra (2.52):

$$d\rho_c = p_c(t) \left[ \frac{\eta \mathcal{S}\rho_c(t)}{P_c(t)} - \rho_c(t) \right] + \mathcal{R}(dt)\rho_c, \quad (2.91)$$

onde

$$\mathcal{R}(dt) = [\mathcal{L} - \eta \mathcal{S} + P_c(t)] dt. \quad (2.92)$$

Utilizando (2.54), (2.86) e (2.88), podemos colocar (2.92) na forma:

$$\mathcal{R}(dt)\rho_c = -\frac{i}{\hbar} \left[ H_s - \frac{i\eta\gamma}{2} \hbar a^\dagger a, \rho_c(t) \right] dt + \eta\gamma \text{Tr}[a\rho_c(t)a^\dagger] \rho_c dt + (1 - \eta) \mathcal{D}\rho_c(t) dt. \quad (2.93)$$

Para podermos “abrir” a equação (2.91) em uma equação estocástica para o vetor de estado, temos como condição necessária e suficiente que  $\eta = 1$  (essa condição elimina o último termo de (2.93)). A equação obtida então é dada por:

$$|d\psi_c\rangle = \left\{ p_c \left( \frac{a}{\sqrt{\langle a^\dagger a \rangle}} - 1 \right) + dt \frac{\gamma}{2} [\langle a^\dagger a \rangle - a^\dagger a] - \frac{i}{\hbar} H_s dt \right\} |\psi_c(t)\rangle, \quad (2.94)$$

que é idêntica a (2.59), levando-se em conta (2.88).

Obtivemos então que a evolução do vetor de estado desse sistema segue exatamente o método de Monte Carlo. A condição de que o detector deva ter eficiência de 100% é facilmente entendida, pois para podermos acompanhar a evolução de um estado puro, não se pode perder nenhuma informação. Caso tivéssemos  $\eta = 0$  (eficiência nula), vemos por (2.91) e (2.93) que a evolução voltaria a ser dada pela equação mestra usual (2.52). Outro fator importante foi termos suposto a inexistência de fótons térmicos. Caso contrário, eles também seriam detectados, o que “estragaria” o acompanhamento da evolução do sistema, não permitindo a existência de uma equação estocástica para o vetor de estado.

Suponhamos agora que se, ao invés de termos colocado um fotodetector, tivéssemos utilizado um outro processo de medida. A evolução estocástica do vetor de estado seria a mesma? Para verificarmos isso, vamos supor que seja feita uma medida heterodina (o caso da medida homodina não irá nos interessar. Ela é analisada em ([22], [24])). O esquema experimental está representado na figura 2.1 na página 28.

Figure 2.1: Esquema experimental de uma medida heterodina.

O espelho ( $\epsilon$ ) possui transmissividade de 50%. O oscilador local emite um campo clássico  $\beta(t)$  que é dado por:

$$\beta(t) = \beta_0 e^{-i(\omega+\Omega)t}, \quad (2.95)$$

onde  $\omega$  é a frequência característica do sistema e  $\Omega$  é o “detuning”. Na representação de interação, passamos para um referencial girante com frequência angular  $\omega$  e com isso:

$$\beta(t) = \beta_0 e^{-i\Omega t}, \quad (2.96)$$

além do que  $H_s$  será substituído por  $V_I$  (potencial do sistema na representação de interação). Supondo novamente o estado do banho como sendo o vácuo e que os detectores  $D_1$  e  $D_2$  são

perfeitos (eficiência de 100%), pode-se mostrar que os respectivos operadores de aniquilação são dados por (ver apêndice C):

$$L_1(t) = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} [a - \beta(t)], \quad (2.97)$$

$$L_2(t) = i\sqrt{\frac{\gamma}{2}} [a + \beta(t)]. \quad (2.98)$$

Teremos então agora dois superoperadores de salto (2.56) ao invés de somente um, como na fotodeteção. Repetindo o mesmo argumento anterior, chegamos à seguinte equação mestra estocástica:

$$d\rho_c = p_c^1 \left[ \frac{\mathcal{S}_1(t)\rho_c(t)}{P_c^1(t)} - \rho_c(t) \right] + p_c^2 \left[ \frac{\mathcal{S}_2(t)\rho_c(t)}{P_c^2(t)} - \rho_c(t) \right] - \frac{i}{\hbar} [V_I - \frac{i\gamma}{2}\hbar a^\dagger a, \rho_c(t)] dt + \gamma Tr[a\rho_c(t)a^\dagger] \rho_c(t) dt. \quad (2.99)$$

Nota-se que temos agora duas variáveis aleatórias independentes ( $p_c^1$  e  $p_c^2$ ) ao invés de só uma. Como estamos considerando detecção perfeita, podemos “abrir” (2.99) em uma equação estocástica para o vetor de estado:

$$|d\psi_c\rangle = \left\{ p_c^1 \left( \frac{L_1(t)}{P_c^1(t)} - 1 \right) + p_c^2 \left( \frac{L_2(t)}{P_c^2(t)} - 1 \right) - dt \left[ iV_I + \frac{\gamma}{2} (a^\dagger a - \langle a^\dagger a \rangle) \right] \right\} |\psi_c(t)\rangle. \quad (2.100)$$

Há porém um problema conceitual com a equação (2.100). Na forma em que está é como se os detectores  $D_1$  e  $D_2$  medissem sinais discretos. Só que o oscilador local é tratado classicamente em uma medida heterodina, o que implica que os detectores devem medir correntes contínuas ao invés de pulsos discretos. Esse limite clássico é tomado quando impomos  $|\beta_0| \rightarrow \infty$ , isto é, número médio de fótons do oscilador é muito grande. Para podermos deduzir essa evolução contínua, seguiremos uma outra linha de raciocínio [24].

Vamos estudar a evolução durante o intervalo de tempo  $[t, t + \Delta t]$ . A ordem de grandeza de  $\Delta t$  estará ligada a de  $|\beta_0|$  do seguinte modo:

$$|\beta_0| \sim \epsilon^{-1} \gg 1, \quad (2.101)$$

$$\gamma\Delta t \sim \epsilon^{3/2} \ll 1. \quad (2.102)$$

Com isso temos que há um número grande de fotodeteções ( $N$ ) no intervalo  $[t, t + \Delta t]$ :

$$N \sim |\beta_0|^2 \gamma \Delta t \sim \epsilon^{-1/2} \gg 1. \quad (2.103)$$

Pela teoria semiclássica da fotodeteção, a probabilidade de detectarmos  $N$  fótons no detector  $D_j$ , em um intervalo de tempo  $\Delta t$  pequeno comparado à escala de tempo para mudanças significativas no sistema  $S$ , mas grande com relação ao tempo médio entre duas emissões fotoelétricas, é dada por [25]:

$$p_j(N; t, t + \Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle L_j^\dagger L_j \rangle \Delta t}} e^{-\frac{(N - \langle L_j^\dagger L_j \rangle \Delta t)^2}{2\langle L_j^\dagger L_j \rangle \Delta t}}, \quad (2.104)$$

onde

$$\langle L_j^\dagger L_j \rangle \equiv \langle \psi_c(t) | L_j^\dagger L_j | \psi_c(t) \rangle. \quad (2.105)$$

É fácil entender o porquê da distribuição ser Gaussiana: as emissões fotoelétricas são eventos aleatórios. Logo, pelo teorema do limite central, o número total de fótons medidos em  $\Delta t$  tende a ter uma distribuição desse tipo.

No caso do detector  $D_1$ , temos que a média da Gaussiana é dada por:

$$\bar{N}_1 = \langle L_1^\dagger L_1 \rangle \Delta t. \quad (2.106)$$

Aplicando (2.97) a (2.106), temos:

$$\bar{N}_1 = \frac{\gamma}{2} \langle (a^\dagger - \beta^*(t))(a - \beta(t)) \rangle \Delta t, \quad (2.107)$$

$$= \frac{\gamma}{2} |\beta_0|^2 \left[ 1 - \left\langle \frac{a}{\beta_0} e^{i\Omega t} + \frac{a^\dagger}{\beta_0^*} e^{-i\Omega t} \right\rangle + \left\langle \frac{a^\dagger a}{|\beta_0|^2} \right\rangle \right] \Delta t. \quad (2.108)$$

Levando-se em conta (2.101), podemos desprezar o último termo em (2.108) que é de ordem  $O(\epsilon^2)$ :

$$\bar{N}_1 = \frac{\gamma}{2} |\beta_0|^2 \left[ 1 - \left\langle \frac{a}{\beta_0} e^{i\Omega t} + \frac{a^\dagger}{\beta_0^*} e^{-i\Omega t} \right\rangle \right] \Delta t. \quad (2.109)$$

O desvio padrão será dado por:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} |\beta_0| \Delta t \sqrt{1 - \left\langle \frac{a}{\beta_0} e^{i\Omega t} + \frac{a^\dagger}{\beta_0^*} e^{-i\Omega t} \right\rangle}. \quad (2.110)$$

Iremos agora desprezar termos de ordem  $O(\epsilon)$ :

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} |\beta_0| \Delta t. \quad (2.111)$$

O mesmo pode ser feito para o detector  $D_2$ , levando-se em conta (2.98). Obtemos então:

$$\bar{N}_2 = \frac{\gamma}{2} |\beta_0|^2 [1 + \langle \frac{a}{\beta_0} e^{i\Omega t} + \frac{a^\dagger}{\beta_0^*} e^{-i\Omega t} \rangle] \Delta t, \quad (2.112)$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} |\beta_0| \Delta t. \quad (2.113)$$

Como sabemos que um processo de Wiener possui uma distribuição Gaussiana e considerando os resultados acima (2.109), (2.111), (2.112) e (2.113), podemos representar o número de fótons medido nos detectores como sendo um processo estocástico (em uma distribuição Gaussiana há 68% de chances do valor sorteado estar no intervalo  $[\bar{N} - \sigma, \bar{N} + \sigma]$ ):

$$N_j = \frac{\gamma}{2} |\beta_0|^2 [1 + (-1)^j \langle \frac{a}{\beta_0} e^{i\Omega t} + \frac{a^\dagger}{\beta_0^*} e^{-i\Omega t} \rangle] \Delta t + \sqrt{\frac{\gamma}{2}} |\beta_0| \Delta W_j, \quad (2.114)$$

onde  $j = \{1, 2\}$  e  $\Delta W_j$  são incrementos de Wiener reais e independentes, satisfazendo a  $\overline{(\Delta W)^2} = \Delta t$ .

Utilizaremos agora o método das trajetórias quânticas (apêndice A), para obtermos o vetor de estado condicionado do sistema no instante  $t + \Delta t$ . Ele irá depender do número de fotodetecções em  $D_1$  e  $D_2$  e uma possível “trajetória” poderia ser a seguinte:

$$|\tilde{\psi}_c(t + \Delta t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}(t+\Delta t-t_k)} L_1(t_k) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}(t_k-t_{k-1})} L_2(t_{k-1}) \dots L_1(t_1) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}(t_1-t)} |\psi_c(t)\rangle, \quad (2.115)$$

onde

$$\mathcal{H} = V_I - \frac{i\hbar}{2} \sum_{j=1}^2 L_j^\dagger L_j, \quad (2.116)$$

$$k = N_1 + N_2, \quad (2.117)$$

considerando que há  $N_1$  operadores  $L_1$  e  $N_2$  operadores  $L_2$ .

Cada “trajetória” terá uma disposição diferente dos operadores  $L_1$  e  $L_2$  em (2.115), correspondendo a diferentes tempos de detecção. Porém, para a nossa escala de tempo de interesse ( $\Delta t$ ), o estado condicionado não irá depender desses tempos de fotodetecção ( $t_1, \dots, t_k$ ) se levarmos em conta apenas termos até a ordem  $O(\epsilon^{3/2})$  [24]. Nesse caso os operadores em (2.115) comutam e com isso teremos:

$$|\tilde{\psi}_c(t + \Delta t)\rangle \cong e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} \Delta t} L_1^{N_1}(t) L_2^{N_2}(t) |\psi_c(t)\rangle. \quad (2.118)$$



Utilizando (2.97), (2.98) e (2.116) em (2.118), obtemos:

$$|\tilde{\psi}_c(t + \Delta t)\rangle = (-1)^{N_1} i^{N_2} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\gamma}{2} |\beta_0|^2 \Delta t} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right)^{N_1+N_2} (\beta(t))^{N_1+N_2} e^{-\left(\frac{i}{\hbar} V_I + \frac{\gamma}{2} a^\dagger a\right) \Delta t} \left(1 + \frac{a}{\beta_0} e^{i\Omega t}\right)^{N_2} \left(1 - \frac{a}{\beta_0} e^{i\Omega t}\right)^{N_1} |\psi_c(t)\rangle. \quad (2.119)$$

Os primeiros 5 fatores à direita de (2.119) são descartados para que tenhamos  $|\tilde{\psi}_c(t + \Delta t)\rangle \rightarrow |\psi_c(t)\rangle$  quando  $\Delta t \rightarrow 0$ . Logo o resultado final será:

$$|\tilde{\psi}_c(t + \Delta t)\rangle = e^{-\left(\frac{i}{\hbar} V_I + \frac{\gamma}{2} a^\dagger a\right) \Delta t} \left(1 + \frac{a}{\beta_0} e^{i\Omega t}\right)^{N_2} \left(1 - \frac{a}{\beta_0} e^{i\Omega t}\right)^{N_1} |\psi_c(t)\rangle. \quad (2.120)$$

Aplicando agora (2.114) em (2.120), tomando o limite para o contínuo ( $|\beta_0| \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow dt$  e  $\Delta W_j \rightarrow dW_j$ ) e novamente só considerando termos até  $O(\epsilon^{3/2})$ , tem-se:

$$|\tilde{\psi}_c(t + dt)\rangle = \left\{1 - \left(\frac{i}{\hbar} V_I + \frac{\gamma}{2} a^\dagger a\right) dt + a[\gamma dt \langle a^\dagger + a e^{-2i(\varphi - \Omega t)} \rangle + \sqrt{\gamma} e^{-i(\varphi - \Omega t)} dW] \right\} |\psi_c(t)\rangle, \quad (2.121)$$

onde

$$dW \equiv \frac{dW_2 - dW_1}{\sqrt{2}}, \quad (2.122)$$

$$\varphi = \arg(\beta_0). \quad (2.123)$$

Integremos agora a equação (2.121):

$$|\tilde{\psi}_c(t + \Delta t)\rangle = \left\{1 - \left(\frac{\gamma}{2} a^\dagger a + \frac{i}{\hbar} V_I\right) \Delta t + [\gamma \langle a^\dagger \rangle \Delta t + \gamma \langle a \rangle \int_t^{t+\Delta t} e^{-2i(\varphi - \Omega s)} ds + \sqrt{\gamma} \int_t^{t+\Delta t} e^{-i(\varphi - \Omega s)} dW(s) ds] a \right\} |\psi_c(t)\rangle. \quad (2.124)$$

A primeira integral será da ordem de  $\gamma/\Omega$ , enquanto que a segunda define uma nova variável aleatória complexa:

$$d\xi(t) \equiv \int_t^{t+\Delta t} e^{-i(\varphi - \Omega s)} dW(s) ds. \quad (2.125)$$

Para termos uma medida heterodina, deve-se impor  $\Omega \gg \gamma$  [22]. Tomando novamente o limite para o contínuo em (2.124) ( $\Delta t \rightarrow dt, \gamma/\Omega \rightarrow 0$  e  $\Delta\xi(t) \rightarrow d\xi(t)$ ), tem-se:

$$|d\tilde{\psi}_c\rangle = dt \left\{ [\gamma \langle a^\dagger \rangle a - \frac{\gamma}{2} a^\dagger a + \sqrt{\gamma} a d\xi(t)] - \frac{i}{\hbar} V_I \right\} |\tilde{\psi}_c(t)\rangle. \quad (2.126)$$

onde  $d\xi(t)$  satisfaz a  $\overline{d\xi^*(t')d\xi(t)} = \delta(t - t')$ . Vemos que a equação (2.126) é idêntica a (2.66) com o operador de relaxação (2.88).

Concluimos então que realmente existem sistemas físicos onde o vetor de estado evolui segundo as equações de Schrödinger estocásticas. O método de Monte Carlo surge quando medimos a intensidade de luz, enquanto que o modelo de difusão surge na medida da amplitude e da fase do campo elétrico; uma medida heterodina. Logo basta trocarmos o modo como medimos a radiação emergente, que muda completamente a evolução do vetor de estado. Isso é um efeito tipicamente quântico: **o estado de um sistema está condicionado ao processo de medida clássico utilizado.**

Com isso os “saltos” no método de Monte Carlo não correspondem a transições no sistema, ao contrário do que se poderia pensar em princípio. Isso porque basta mudarmos o processo de medida que a evolução passa a ser contínua (modelo de difusão), não havendo mais “saltos”. Outra conclusão a que chegamos é que nenhum dos dois métodos é preferível. Ambos são maneiras legítimas de se representar a evolução, dependendo do processo de medida e ao contrário do que achavam N.Gisin e I.C.Percival [9].

A interpretação dada por H.M.Wiseman e G.J.Milburn veio clarear e, de uma certa maneira, unificar os métodos. Ambos surgiram independentes um do outro e, através de uma terceira teoria (trajetórias quânticas de H.J.Carmichael ([14], apêndice A) ), eles mostraram que o método de Monte Carlo e o modelo de difusão possuíam uma origem em comum: um sistema ótico simples acoplado a um aparelho de medida.

## Chapter 3

# Medida Quântica Não-Demolidora do Número de Fótons

### 3.1 O que é uma Medida Quântica Não-Demolidora?

As primeiras idéias a respeito de medida quântica não-demolidora (medida QND) surgiram na década de 70, propostas por V.B.Braginsky e Y.I.Vorontsov [26]. Eles tinham interesse em monitorar a força clássica que agia em um detector de ondas gravitacionais com uma precisão maior do que a existente pelos métodos usuais [27]. Como um detector de ondas gravitacionais pode ser modelado em primeira aproximação como sendo um oscilador harmônico, não demorou muito para se estender esse processo de medida para a radiação eletromagnética, que segue as mesmas equações no caso do campo livre ([4], [28]).

A principal característica de uma medida QND é que ela nos permite medir um observável de um sistema, sem que sua evolução seja alterada. É claro que, devido ao princípio de incerteza, o observável conjugado é perturbado de uma maneira imprevisível.

Vamos supor que queremos fazer uma medida QND do observável  $A_s$  do sistema  $S$ . Para isso é necessário um outro sistema  $P$  que será acoplado a  $S$  durante um intervalo  $\Delta T$ . É através da medida de um observável  $A_P$  de  $P$  que saberemos o valor de  $A_s$ . O Hamiltoniano total durante o intervalo  $\Delta T$  é dado por [4]:

$$H = H_s + H_P + H_I, \tag{3.1}$$

onde

$H_S$ : Hamiltoniano de  $S$ ,

$H_P$ : Hamiltoniano de  $P$ ,

$H_I$ : Hamiltoniano de interação entre  $S$  e  $P$ .

Na representação de Heisenberg, a evolução dos operadores é dada por:

$$i\hbar \frac{dA_j}{dt} = [A_j, H_j] + [A_j, H_I], \quad (3.2)$$

com  $j \in \{S, P\}$ .

Para que tenhamos uma medida QND, as seguintes condições têm de ser satisfeitas:

**1)**  $\frac{\partial H_I}{\partial A_S} \neq 0$

O Hamiltoniano de interação deve ser função de  $A_S$ , senão o sistema  $P$  não tem como adquirir informação a seu respeito.

**2)**  $[A_P, H_I] \neq 0$

Se o comutador fosse nulo, a dinâmica de  $A_P$  (3.2) só seria dada por  $H_P$ , não podendo adquirir informação à respeito de  $A_S$ .

**3)**  $[A_S, H_I] = 0$

Pois não queremos que a dinâmica de  $A_S$  (3.2) seja alterada pela medida.

**4)**  $\frac{\partial H_S}{\partial A_S^c} = 0$ ,  $A_S^c$ : observável conjugado de  $A_S$ .

Como já foi dito,  $A_S^c$  sofre uma alteração imprevisível e não queremos que isso venha a influir na evolução de  $A_S$ .

As condições de **1** a **4** definem um processo de medida QND. Para que sejam satisfeitas, a maioria dos métodos propostos baseiam-se em acoplamentos dispersivos, isto é, não-ressonantes), e efeitos não-lineares. Como essas condições são difíceis de se obter e de se controlar em laboratório, ainda não foi feita até hoje uma medida QND na prática. Porém há diversos grupos experimentais trabalhando no assunto e espera-se em breve obtê-la.

### 3.2 A Proposta de M.Brune et al.

Uma proposta recente de medida QND foi feita por M.Brune *et al.* em [29] e em [4], onde foi melhor analisada. Tem como objetivo medir o número de fótons (observável  $A_s$ ) em um modo (sistema  $S$ ) de uma cavidade. Para isto baseia-se na detecção do deslocamento de fase (“phase shift”) que ocorre no dipolo elétrico (observável  $A_P$ ) de um átomo (sistema  $P$ ), após este ter interagido dispersivamente com o campo.

A interação dispersiva cria correlações entre o campo e o átomo. Ao medirmos o nível de energia e a velocidade do átomo, essas correlações causam uma mudança no estado do campo. Para que se chegue a um estado de Fock, são necessários que diversos átomos sejam medidos após passarem pela cavidade com velocidades aleatórias. Com isso consegue-se detectar um número muito pequeno de fótons, sem que haja troca de energia, o que caracteriza uma medida QND.

Como já foi dito, o problema prático das medidas QND é que os processos físicos em que se baseiam (no nosso caso uma interação dispersiva) possuem um acoplamento muito fraco, sendo difícil de se detectar. A fim de melhorarmos isso, iremos considerar os átomos em estados de Rydberg, que são estados com número quântico principal muito grande (da ordem de 50). Com isso o campo na cavidade estará na faixa de microondas, quase-ressonante com dois níveis de Rydberg adjacentes. Já foi mostrado que este é o sistema ideal para se obter um forte acoplamento com poucos fótons [30].

Seja então um átomo com os níveis de energia esquematizados na figura 3.1 [4].

onde

$\delta$ : dessintonia,

$\omega$ : frequência do modo da cavidade,

$\{|f\rangle, |e\rangle, |i\rangle\}$  são ortonormais,

$$\omega_{ie} \equiv \frac{E_i - E_e}{\hbar}, \quad (3.3)$$

$$\omega_{ef} \equiv \frac{E_e - E_f}{\hbar}. \quad (3.4)$$

Vamos supor que os níveis  $i$  e  $f$  possuem a mesma paridade, oposta a de  $e$ . Com isso não há dipolo de transição entre  $i$  e  $f$ . Além disso supomos:

$$\delta \ll \omega_{ie}, \omega_{ef}. \quad (3.5)$$

Se definirmos  $\Omega(\vec{r})$  ( $\vec{r}$  é a posição do átomo na cavidade) como sendo a frequência de Rabi no vácuo para o acoplamento do dipolo entre os níveis  $e$  e  $i$  e o modo da cavidade, então quando houver  $n$  fótons ela será dada por  $\Omega\sqrt{n}$  (para a absorção de fótons) ou por  $\Omega\sqrt{n+1}$  (para a emissão de fótons). Vamos supor também que  $\delta \gg \Omega\sqrt{n}$ , isto é:

$$\frac{\Omega^2 n}{\delta^2} \ll 1. \quad (3.6)$$

Devido à hipótese (3.5), a interação dispersiva não afeta o nível  $f$ . Ela só irá afetar a transição  $e \rightarrow i$  e para podermos estudá-la, iremos tomar a seguinte base:  $\{| \text{átomo, campo} \rangle\}$ . A interação átomo-campo, na aproximação de onda girante, é dada por:

$$V = \hbar\Omega [ |i\rangle\langle e|a + a^\dagger|e\rangle\langle i| ], \quad (3.7)$$

onde  $a^\dagger$  e  $s$  são os operadores de criação e destruição de fótons do modo da cavidade.

Levando-se em conta (3.6) e o fato de que os estados  $\{|e, n\rangle, |i, n-1\rangle\}$  são quase degenerados, podemos utilizar a teoria de perturbação até segunda ordem para calcular o deslocamento de energia do nível  $|e, n\rangle$  ( $\Delta_e$ ) devido a  $V$ :

$$\hbar\Delta_e^{(1)} = \langle e, n|V|e, n\rangle = 0, \quad (3.8)$$

$$\hbar\Delta_e^{(2)} = \frac{|\langle e, n|V|i, n-1\rangle|^2}{\hbar\delta} = \frac{\hbar\Omega^2}{\delta} n. \quad (3.9)$$

Logo, pela equação (3.9), temos que há um deslocamento na frequência de transição  $e \rightarrow f$  proporcional ao número de fótons  $n$ .

Analisemos agora o Hamiltoniano atômico. Considerando  $E_f = 0$ , temos:

$$H_{at} = \hbar\omega_{ef}|e\rangle\langle e|. \quad (3.10)$$

Devido ao deslocamento de energia (3.9), podemos considerar um Hamiltoniano efetivo dado por:

$$H_{at}^{ef} = \hbar(\omega_{ef} + \frac{\Omega^2}{\delta}n)|e\rangle\langle e|. \quad (3.11)$$

Dado que  $n$  é o número de fótons, um Hamiltoniano de interação efetivo pode ser escrito como:

$$H_I^{ef} = \frac{\hbar\Omega^2}{\delta} a^\dagger a |e\rangle\langle e|. \quad (3.12)$$

Para ser feita a medida QND, utilizaremos como observável  $A_P$  o operador dipolo atômico:

$$A_{at} = \frac{1}{2i} [ |e\rangle\langle f| - |f\rangle\langle e| ]. \quad (3.13)$$

As condições de **1** a **4** da seção anterior são satisfeitas por (3.13), como podemos facilmente verificar: a condição **1** é verdade pois (3.12) é função de  $A_s = a^\dagger a$ ; a condição **2** é satisfeita pois  $[A_{at}, H_I^{ef}] = \frac{i\hbar\Omega^2}{2\delta} ( |f\rangle\langle e| + |e\rangle\langle f| ) \neq 0$ ; a condição **3** também ocorre pois  $[a^\dagger a, H_I^{ef}] = 0$  e a condição **4** é claramente satisfeita pois (3.11) não depende da fase do campo. Utilizando (3.11), obtemos na representação de Heisenberg:

$$A_{at}^H = \frac{1}{2i} [ e^{i(\omega_{ef} + \frac{\Omega^2}{\delta}n)t} |e\rangle\langle f| - e^{-i(\omega_{ef} + \frac{\Omega^2}{\delta}n)t} |f\rangle\langle e| ]. \quad (3.14)$$

Temos então que, após um tempo  $t$  de interação, o dipolo atômico aumenta sua fase de:

$$\Delta\varphi = (\omega_{ef} + \frac{\Omega^2}{\delta}n)t. \quad (3.15)$$

Com isto, se conseguirmos medir  $\Delta\varphi$ , teremos informação a respeito do número de fótons  $n$ . A maneira mais fácil de medi-la é através do método de Ramsey de campos oscilantes separados [31]. Este consiste em duas cavidades conhecidas como primeira e segunda zonas de Ramsey ( $R_1$  e  $R_2$ ), onde há um campo clássico de frequência  $\omega_R$ . A cavidade fica localizada entre as duas zonas, como pode ser visto na figura 3.2 na página 45, que representa o esquema experimental da medida QND.

Vamos então determinar o vetor de estado do sistema átomo + campo após o átomo sair de  $R_2$ . Para isto supomos que a cavidade possui  $n$  fótons e que ela tem alto-Q, isto é, a taxa de decaimento do campo é muito pequena ( $1/\gamma \ll T$  onde  $\gamma$  é a taxa de decaimento e  $T$  é o tempo médio para o átomo cruzar  $L$ ). Logo podemos considerar  $n$  fixo durante a passagem do átomo por  $L$ . O vetor de estado normalizado é dado, na representação de interação, por:

$$|\psi\rangle = b_e(n, t)|e, n\rangle + b_f(n, t)|f, n\rangle, \quad (3.16)$$

onde  $b_e$  e  $b_f$  serão determinados pelas zonas de Ramsey e pela interação dispersiva do átomo com o campo. Como vemos pela figura 3.2, o átomo antes de entrar em  $R_1$  é excitado para o estado  $|e\rangle$  por um feixe de laser e por microondas [32]. Sendo assim, as condições iniciais sobre os coeficientes são:

$$b_e(n, 0) = 1, \quad b_f(n, 0) = 0. \quad (3.17)$$

A fim de simplificar os cálculos, o campo clássico  $\omega_R$  é suposto uniforme em  $R_1$  e  $R_2$  e toma-se  $|\omega_R - \omega_{ef}| \ll 1/\tau$ , onde  $\tau$  é o tempo que o átomo leva para atravessar uma das zonas. Com isso a dessintonia de  $\omega_R$  pode ser desprezada. Como o campo  $\omega_R$  é considerado clássico, podemos utilizar as equações de Bloch para obtermos os coeficientes após o átomo atravessar  $R_1$ :

$$\frac{db_f}{dt}(n, t) = -\frac{\Omega_R}{2}b_e(n, t), \quad (3.18)$$

$$\frac{db_e}{dt}(n, t) = \frac{\Omega_R}{2}b_f(n, t), \quad (3.19)$$

onde  $\Omega_R$  é a frequência de Rabi.

Utilizando (3.17), temos então que (3.18) e (3.19) nos dão os seguintes coeficientes no instante  $\tau$ :

$$b_f(n, \tau) = -sen\frac{\Omega_R\tau}{2}, \quad (3.20)$$

$$b_e(n, \tau) = cos\frac{\Omega_R\tau}{2}. \quad (3.21)$$

Como estamos estudando a evolução de  $|\psi\rangle$  na representação de interação, o Hamiltoniano que governa a dinâmica do átomo na cavidade será dado por (3.12). Com isso temos:

$$\frac{db_f}{dt}(n, t) = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{db_e}{dt}(n, t) = -i\frac{\Omega^2(\vec{r})}{\delta}nb_e(n, t). \quad (3.23)$$

Levando-se em conta as condições iniciais (3.21) e (3.20), temos:

$$b_f(n) = -sen\frac{\Omega_R\tau}{2}, \quad (3.24)$$

$$b_e(n) = e^{-inev_0/v}cos\frac{\Omega_R\tau}{2}, \quad (3.25)$$

onde definimos  $\epsilon \equiv \Omega^2(\vec{r} = 0)L_c/2\delta v_0$  como sendo o deslocamento de fase médio de cada átomo ao passar pela cavidade. Temos que  $v$  é a velocidade do átomo,  $v_0$  é o valor médio da distribuição de velocidades e  $\Omega^2(\vec{r} = 0)/2$  é o valor médio de  $\Omega(\vec{r})$  se sua variação, ao longo da cavidade, for senoidal.

A zona  $R_2$  é idêntica à  $R_1$ . Porém deve-se levar em conta a possibilidade de haver uma dessintonia  $|\omega_R - \omega_{ef}|$  que provocaria uma diferença de fase entre o campo clássico da zona



de Ramsey e a coerência atômica durante o período em que o átomo esteve na cavidade. Isso ocorre por estarmos na representação de interação e, devido à dessintonia, há uma defasagem entre o referencial girante  $\omega_{ef}$  com relação a  $\omega_R$ . Nesse caso a dinâmica, quando o átomo entra em  $R_2$ , será dada por:

$$\frac{db_f}{dt}(n, t) = -\frac{\Omega_R}{2} e^{i\varphi_0 v_0/v} b_e(n, t), \quad (3.26)$$

$$\frac{db_e}{dt}(n, t) = \frac{\Omega_R}{2} e^{-i\varphi_0 v_0/v} b_f(n, t), \quad (3.27)$$

onde

$$\varphi_0 \equiv (\omega_R - \omega_{ef})L/v_0, \quad (\omega_R \geq \omega_{ef}) \quad (3.28)$$

Utilizando as condições iniciais (3.24) e (3.25), obtemos os coeficientes quando o átomo deixa  $R_2$ :

$$b_f(n, v) = -\frac{1}{2}(1 + e^{i(\varphi_0 - n\epsilon)v_0/v}) \text{sen} \Omega_R \tau, \quad (3.29)$$

$$b_e(n, v) = e^{-in\epsilon v_0/v} \cos^2 \frac{\Omega_R \tau}{2} - e^{-i\varphi_0 v_0/v} \text{sen}^2 \frac{\Omega_R \tau}{2}. \quad (3.30)$$

Por último vamos supor que  $\Omega_R \tau = \pi/2$  quando  $v = v_0$ . Com isso chegamos à forma final para o estado do sistema quando o átomo sai da zona  $R_2$ :

$$|\psi\rangle = b_e(n, v)|e, n\rangle + b_f(n, v)|f, n\rangle, \quad (3.31)$$

com os coeficientes dados por:

$$b_e(n, v) = e^{-i\varphi_0 v_0/v} [e^{i\varphi_n v_0/v} \cos^2 \frac{\pi v_0}{4v} - \text{sen}^2 \frac{\pi v_0}{4v}], \quad (3.32)$$

$$b_f(n, v) = -\frac{1}{2}(1 + e^{i\varphi_n v_0/v}) \text{sen} \frac{\pi v_0}{2v}, \quad (3.33)$$

onde

$$\varphi_n \equiv \varphi_0 - n\epsilon. \quad (3.34)$$

Temos então que  $b_e$  e  $b_f$  são funções de  $n$  e  $v$ , parametrizadas por  $\varphi_0$  e  $\epsilon$ . Nota-se que não há mudança no número de fótons em (3.31), já que a interação é dispersiva.

A equação (3.31) foi calculada supondo-se que a cavidade estava em um estado de Fock  $|n\rangle$ . A generalização para outras situações é imediata! No caso do estado ser uma superposição coerente, teremos:

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n [b_e(n, v)|e, n\rangle + b_f(n, v)|f, n\rangle], \quad (3.35)$$

onde  $a_n$  são os coeficientes do campo.

Porém, se tivermos um campo térmico, não será possível descrevê-lo como sendo um estado puro. Nesse caso é necessário utilizar o formalismo do operador densidade. Suponhamos então que o campo na cavidade seja inicialmente dado por  $\rho_0$ . Para realizarmos a medida QND, passamos uma seqüência de átomos, todos no mesmo estado inicial, cuja velocidade e estado serão medidos no ionizador. Essa seqüência de medidas irá mudar o campo gradativamente, devido às correlações, até se chegar a um estado de Fock (estamos considerando a cavidade sem dissipação).

Com isso o operador densidade do sistema átomo + campo, após o átomo  $k + 1$  ter passado, será dado por:

$$\rho_{k+1}^{at+campo} = \sum_{n,m} |\psi\rangle \rho_{k;n,m} \langle\psi|, \quad (3.36)$$

onde  $|\psi\rangle$  é dado por (3.31) e  $\rho_{k;n,m}$  são os elementos do operador densidade do campo após o átomo  $k$  ter passado.

Após a medida do estado e da velocidade do átomo no ionizador, o operador (3.36) é projetado no sub-espço  $|s, n\rangle\langle s, m|$ ,  $s \in \{e, f\}$ :

$$\langle s, n | \rho_{k+1}^{at+campo} | s, m \rangle \equiv \rho_{k+1;n,m}^{(s,v)} = \frac{b_s(n, v) b_s^*(m, v)}{\Pi_s(p_k(n), v)} \rho_{k;n,m}, \quad (3.37)$$

onde

$$\Pi_s(p_k(n), v) \equiv \sum_n |b_s(n, v)|^2 p_k(n), \quad (3.38)$$

$$p_k(n) \equiv \rho_{k;n,n}. \quad (3.39)$$

O denominador de (3.37) garante a normalização do traço de  $\rho$  e possui a seguinte interpretação:  $\Pi_s(p_k(n), v)$  é a probabilidade de se medir o átomo no estado  $s$  com velocidade  $v$ , dado que o campo possui a distribuição de fótons  $p_k(n)$ . Se fizermos  $n = m$  em (3.37) teremos:

$$p_{k+1}^{(s,v)}(n) = \frac{\Pi_s(n, v)}{\Pi_s(p_k(n), v)} p_k(n), \quad (3.40)$$

onde

$$\Pi_s(n, v) \equiv |b_s(n, v)|^2. \quad (3.41)$$

Temos então que a distribuição de fótons é modificada a cada átomo cuja energia e velocidade são medidas. No caso de um estado de Fock,  $p_k(n) = \delta(n - n_j)$ , logo

$\Pi_s(p_k(n), v) = \Pi_s(n_j, v)$  e temos pela equação (3.40) que a distribuição não é alterada. Esta é uma das características de uma medida QND: permite medir uma grandeza sem alterar o seu valor. Outra característica é que se o estado do átomo não for medido,  $p_k(n)$  também não se altera. Isso porque, ao invés de (3.37), teríamos:

$$\sum_{s=e,f} \langle s, n | \rho_{k+1}^{at+campo} | s, m \rangle \equiv \rho_{k+1;n,m}^{(s?,v)} = [ \sum_{s=e,f} b_s(n, v) b_s^*(m, v) ] \rho_{k;n,m}. \quad (3.42)$$

Fazendo  $n = m$ :

$$p_{k+1}^{(s?,v)}(n) = [\Pi_e(n, v) + \Pi_f(n, v)] p_k(n). \quad (3.43)$$

Como  $\Pi_s$  é a probabilidade de se encontrar o átomo no estado  $s$  e o mesmo só pode estar em  $e$  ou  $f$ , temos:

$$\Pi_e(n, v) + \Pi_f(n, v) = 1, \quad (3.44)$$

$$p_{k+1}^{(s?,v)}(n) = p_k(n). \quad (3.45)$$

O fato de termos uma dispersão de velocidades ao invés de um feixe monocinético é favorável. Isso porque o campo colapsa para um estado de Fock muito mais rápido quando há dispersão, como pode ser verificado nas simulações. Na verdade pode-se mostrar que se o feixe for monocinético e se  $\epsilon = 2\pi q$ , onde  $q$  é um número racional, então o campo colapsa para um estado de “gato de Schrödinger” ao invés de um estado de Fock [4].

Como seria feita essa medida QND na prática? Inicialmente teríamos um campo na cavidade de alto-Q com uma distribuição  $p_0(n)$  desconhecida. Apesar de não sabermos  $p_0(n)$ , poderíamos impor um limite  $n_{max}$  para o número de fótons na cavidade, já que teríamos uma noção da energia do campo. Com isso tomaríamos as medidas  $\{s_j, v_j\}$  de uma seqüência de átomos e, após um certo número previsto pela teoria como sendo suficiente para gerar um estado de Fock, faríamos a estimativa das probabilidades  $\Pi_f$  e  $\Pi_e$ . Depois é só encontrar  $n \in [0, n_{max}]$  tal que (3.41) seja melhor satisfeita. Teríamos então obtido uma distribuição  $p_k(n)$  centrada em algum  $n_j \in [0, n_{max}]$ . A própria distribuição  $p_0(n)$  poderia ser calculada se pudéssemos repetir o experimento inúmeras vezes, sempre com o mesmo campo inicial.

Como vimos, esse método desenvolvido por M.Brune *et al.* é bastante interessante e pode parecer, *a priori*, fácil de se realizar. Porém a sua realização experimental requer uma

série de cuidados. O primeiro deles seria conseguir uma cavidade de alto-Q. Tem-se obtido fatores Q da ordem de  $10^{10}$  para  $21GHz$  ( $1/\gamma \approx 0,5s$ ) em cavidades supercondutoras a  $0,5K$  [33]. Com esse valor já seria possível medir campos com  $n_{max} \approx 10$ . Outro cuidado seria a preparação dos átomos no estado de Rydberg correto. Uma vantagem desse método é que o ionizador não precisa ter eficiência de 100%, pois, como já foi visto, átomos não detectados não alteram o campo. Todos esses cuidados e muitos outros serão necessários para que se possa realizar este experimento, que certamente representaria um grande avanço no estudo de campos em cavidades.

Figure 3.1: Níveis de energia do átomo utilizado na medida QND.

Figure 3.2: Esquema experimental da medida QND.

1. Feixe de laser e microondas,
2. Primeira e segunda zonas de Ramsey,
3. Cavityde monomodo de alto-Q com o campo a ser medido,
4. Ionizador.

## Chapter 4

# Aplicação dos Métodos

### 4.1 O Modelo de Difusão

No capítulo anterior, o estudo da medida QND foi feito baseado na evolução do operador densidade. Será que, ao invés disso, poderíamos acompanhar a evolução do vetor de estado? Isto é, seria possível aplicar os métodos descritos no capítulo 2 a essa medida? Este será o nosso objetivo nesse capítulo.

Para que possamos aplicar as equações de Schrödinger estocásticas a um problema, é necessário que ele seja um processo irreversível e Markoviano. O processo de medida dos átomos, através de um ionizador, nos assegura essas condições. Isto porque essa medida certamente é irreversível, os elétrons são arrancados dos átomos, e Markoviano, pois não há nenhum efeito de “memória” presente. Sendo assim, nos resta apenas obter os operadores de dissipação que irão representar essa medida.

Se tivéssemos a equação mestra da medida QND, o problema estaria resolvido. Porém ela não é dada em [4], nem em [29]. Além do mais seria inútil tentar deduzi-la! A razão disso é que o experimento trata de uma medida QND, que, por definição, não altera o sistema que está sendo medido. Uma equação mestra nos dá a evolução irreversível do operador densidade **médio** do sistema. Logo a equação mestra para as populações, em uma medida QND, é dada por:

$$\frac{d\rho_{n,n}}{dt} = 0, \quad (4.1)$$

onde  $\rho_{n,n}$  são os termos diagonais que representam as populações.

Parece então que não há operadores de relaxação para a medida QND. No entanto sabemos que há uma evolução irreversível do campo, para um estado de Fock, em uma seqüência de medidas. A solução para esse problema está em estudarmos, não a equação mestra usual (2.52), mas sim a equação mestra **estocástica** (2.55). Em cada seqüência de medidas haverá uma evolução irreversível do operador densidade, porém, na média, será como se não tivéssemos feito medida alguma. Seguindo essa linha de raciocínio fica fácil obtermos os operadores de dissipação.

O átomo, ao ser medido no ionizador, pode ser encontrado no estado  $|f\rangle$  ou no  $|e\rangle$  com uma velocidade  $v$ . Para cada caso haverá um operador de relaxação diferente, como será mostrado abaixo:

**1. Estado fundamental  $|f\rangle$ :**

Nesse caso o operador densidade muda da seguinte maneira:

$$\rho_{k+1} = \frac{B_f(a^\dagger a, v) \rho_k B_f^\dagger(a^\dagger a, v)}{\Pi_f(p_k(n), v)}, \quad (4.2)$$

$$B_f(a^\dagger a, v) = -\frac{1}{2} \text{sen}\left(\frac{\pi v_0}{2v}\right) [1 + e^{i\varphi_0 v_0/v} e^{-i\epsilon \frac{v_0}{v} a^\dagger a}], \quad (4.3)$$

onde a equação (4.2) é igual à (3.37) sob a forma de operador.

A semelhança entre a equação (4.2) e a (2.87) é direta! Quando um fóton é medido na interpretação do Wiseman e do Milburn, o operador densidade do sistema ótico muda de acordo com (2.87), onde no numerador tem-se o operador de “salto”, definido por (2.56), e no denominador a probabilidade de se medir um fóton naquele instante. Na medida QND temos que, quando se mede um átomo no estado fundamental, o operador densidade muda de acordo com (4.2), onde no numerador tem-se o operador de relaxação  $B_f(a^\dagger a, v)$  ( $\eta = 1$ ) e no denominador a probabilidade de se medir um átomo no estado  $|f\rangle$ , com aquela velocidade e com o campo naquela configuração.

**2. Estado excitado  $|e\rangle$ :**

O operador densidade irá mudar do seguinte modo:

$$\rho_{k+1} = \frac{B_e(a^\dagger a, v) \rho_k B_e^\dagger(a^\dagger a, v)}{\Pi_e(p_k, v)}, \quad (4.4)$$

$$B_e(a^\dagger a, v) = e^{-i\epsilon \frac{v_0}{v} a^\dagger a} \cos^2 \frac{\pi v_0}{4v} - e^{-i\varphi_0 v_0/v} \text{sen}^2 \frac{\pi v_0}{4v}, \quad (4.5)$$

onde a expressão (4.4) é a (3.37) sob a forma de operador.



Da mesma maneira a equação (4.4) é análoga à (2.87) com a mesma interpretação.

Chegamos então a **dois** operadores de relaxação:  $B_f(a^\dagger a, v)$  e  $B_e(a^\dagger a, v)$ . Sendo assim fica fácil aplicar agora o modelo de difusão. A equação (2.29), na representação de interação, fica:

$$\begin{aligned}
|d\psi\rangle &= \sum_{s=e,f} [\langle B_s^\dagger(a^\dagger a, v) \rangle B_s(a^\dagger a, v) - \frac{1}{2} B_s^\dagger(a^\dagger a, v) B_s(a^\dagger a, v) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \langle B_s^\dagger(a^\dagger a, v) \rangle \langle B_s(a^\dagger a, v) \rangle] |\psi\rangle dt + \sum_{s=e,f} [B_s(a^\dagger a, v) - \\
&\quad - \langle B_s(a^\dagger a, v) \rangle] |\psi\rangle d\xi_s.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Nessa representação, a interação dispersiva átomo-campo já está incluída nos operadores  $B_f(a^\dagger a, v)$  e  $B_e(a^\dagger a, v)$ , portanto não havendo um termo Hamiltoniano em (4.6). A cada interação da equação (4.6) deverão ser sorteados  $\{d\xi_s\}$  e a velocidade  $v$ . Deve-se tomar o cuidado de se fazer o sorteio de acordo com a distribuição correta para cada variável. No caso dos  $\{d\xi_s\}$  a distribuição é Gaussiana (apêndice B). Pelas equações (2.31) e (2.33) temos que a parte real e imaginária de cada variável terão média nula e variância  $dt/2$ . Já no caso da velocidade, vamos analisar primeiro o esquema experimental. Os átomos são emitidos por um orifício de um forno que, em geral, está a uma temperatura maior do que a ambiente. Este processo é conhecido como **efusão** e a distribuição de velocidades será dada por [34]:

$$f(v)dv = \mathcal{N} v^3 e^{-v^2/2\sigma^2} dv, \tag{4.7}$$

$$\sigma^2 = \frac{k_B T}{m}, \tag{4.8}$$

onde

$\mathcal{N}$ : constante de normalização ( $\mathcal{N} = 1/\int_0^\infty v^3 e^{-v^2/2\sigma^2} dv$ ).

$k_B$ : constante de Boltzmann ( $1,38 \cdot 10^{-23} J/K$ ),

$T$ : temperatura,

$m$ : massa do átomo,

No processo de efusão, a velocidade média é dada pela distribuição do módulo das velocidades:

$$F(v)dv = \frac{4\pi}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} v^2 e^{-v^2/2\sigma^2} dv, \tag{4.9}$$

onde  $\sigma^2$  é dado por (4.8).

A velocidade média obtida através de (4.9) é então:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\sigma. \quad (4.10)$$

Foi feito um programa em Pascal que sorteia as velocidades de acordo com (4.7). Os dados utilizados foram baseados na referência [4]:

$$\bar{v} = 70 \text{ m/s}, \quad (4.11)$$

$$m \approx 10^{-25} \text{ Kg}, \quad (4.12)$$

onde a massa corresponde aos átomos alcalinos.

Para que se obtenha velocidades da ordem de (4.11) ( $T = 14K$ ), é necessário que os átomos, antes de entrarem na cavidade, sejam resfriados a laser [?]. Utilizando (4.11) em (4.10), temos:

$$\sigma = 44 \text{ m/s}. \quad (4.13)$$

Obtivemos então para a frequência de velocidades no caso de 32.000 amostras, o gráfico exibido na figura 4.1.

Podemos agora iterar passo a passo a equação (4.6). Utilizamos como estado inicial do campo um estado coerente. Os coeficientes são dados pela seguinte fórmula:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)|n\rangle, \quad (4.14)$$

$$a_n(0) = \frac{e^{-|\alpha|^2/2}\alpha^n}{\sqrt{n!}}, \quad (4.15)$$

onde  $\alpha$  é uma constante complexa.

A distribuição inicial do campo será dada então por:

$$|a_n(0)|^2 = \frac{e^{-|\alpha|^2}\alpha^{2n}}{n!}. \quad (4.16)$$

A equação (4.16) é uma distribuição de Poisson, cuja média é  $|\alpha|^2$ . Ela é característica de um estado coerente. Como o valor de  $\alpha$  é arbitrário, fixamo-lo como sendo  $\alpha = \sqrt{5}$ , o que nos dá um número médio de fótons igual a 5 no início do experimento.

O passo de iteração utilizado foi  $dt = 0,1$  e o valor das constantes, que são utilizadas em (4.3) e (4.5), foram extraídas da referência [4]: para uma cavidade com  $L_c \approx$

1cm (ver figura 3.2) e com átomos com velocidade média  $\bar{v} = 70 \text{ m/s}$ , temos  $\epsilon = \pi$ , aonde consideramos  $\Omega(\vec{r} = 0) = 4,2 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$  (frequência de Rabi no centro da cavidade) e  $\delta = 10\Omega(\vec{r} = 0)$  (dessintonia entre o átomo e o campo da cavidade). Esses valores satisfazem à condição (3.6). Se supomos que os níveis de Rydberg dos átomos  $e$  e  $i$  possuem números quânticos principais 50 e 51, então a frequência do campo da cavidade deve ser próxima de  $\omega = 51,1 \text{ GHz}$ . Outro ponto importante é que estamos considerando cavidades de alto-Q, isto é, não há decaimento dos fótons da cavidade durante o intervalo de tempo de uma realização.

Na somatória em (4.14) devemos colocar um limite superior ( $n_{max}$ ) para  $n$ . considerando que  $|\alpha|^2 = 5$ , tomamos  $n_{max} = 20$ . Sendo assim, o resultado obtido em uma realização (uma única seqüência de iterações) é o mostrado na figura 4.2.

Notemos pela figura 4.2, que o número médio de fótons ( $N$ ), após algumas oscilações, estaciona no valor  $N = 3$ . As abscissas correspondem ao número de átomos medidos. Esta é a unidade mais natural para se expressar o tempo. Como a cada passo  $dt$  são sorteadas as variáveis  $\{d\xi_s\}$ , é como se fosse medido um átomo nesse instante.

Para verificarmos se realmente o estado do campo colapsou em um estado de Fock, obtivemos os gráficos da evolução da distribuição do campo, mostrados nas figuras 4.3 a 4.6. Através deles vemos que a distribuição de Poisson evolui gradativamente até termos probabilidade 1 de que o estado do campo seja um estado de Fock com  $n = 3$ .

Uma outra maneira de garantirmos que o estado final é um estado de Fock é através do gráfico exibido na figura 4.7 da variância do número de fótons. Ela será nula se e somente se o estado for um estado de Fock. É interessante notar que o modelo de difusão nos permite prever teóricamente o resultado da figura 4.7. A nossa dedução será baseada na referência [9].

Dado o vetor de estado  $|\psi(t)\rangle$  de um sistema no instante  $t$ , o número médio de fótons e a sua variância ( $\mathcal{V}$ ) serão dados respectivamente por:

$$N(t) = \langle a^\dagger a \rangle, \quad (4.17)$$

$$\mathcal{V}[N](t) = \overline{\langle (a^\dagger a)^2 \rangle} - N^2(t), \quad (4.18)$$

onde  $\langle A \rangle \equiv \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle$  e a barra em (4.18) significa uma média sobre um *ensemble* de

realizações. Isso quer dizer que a variância que iremos calcular não é exatamente aquela dada no gráfico da figura 4.7, mas é a média aritmética de várias realizações.

O que queremos provar é que:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{V}[N](t) \leq 0, \forall t. \quad (4.19)$$

Isto nos diz que a variância irá sempre diminuir com o tempo e, como veremos, sua taxa de variação só será nula ao se atingir um estado de Fock. Calculamos então quanto vale a variação  $dN(t)$ :

$$dN(t) \equiv \langle \psi(t) + d\psi | a^\dagger a | \psi(t) + d\psi \rangle - \langle \psi(t) | a^\dagger a | \psi(t) \rangle, \quad (4.20)$$

$$= \langle \psi(t) | a^\dagger a | d\psi \rangle + \langle d\psi | a^\dagger a | \psi(t) \rangle + \langle d\psi | a^\dagger a | d\psi \rangle. \quad (4.21)$$

Utilizando a equação (4.6) em (4.21), o fato de que  $[B_s(a^\dagger a, v), a^\dagger a] = 0, s \in \{e, f\}$ , desprezando termos  $O(dt^{3/2})$  e aplicando (2.33), obtemos:

$$\begin{aligned} dN(t) &= \sum_{a=e,f} [\langle a^\dagger a B_s(a^\dagger a, v) \rangle - \langle B_s(a^\dagger a, v) \rangle N(t)] d\xi_s + \\ &+ \sum_{s=e,f} [\langle a^\dagger a B_s^\dagger(a^\dagger a, v) \rangle - \langle B_s^\dagger(a^\dagger a, v) \rangle N(t)] d\xi_s^*. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A variação  $dN^2(t)$  será dada por:

$$dN^2(t) = dN^2(t+dt) - N^2(t), \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} N^2(t+dt) &= [N(t) + dN(t)]^2, \\ &= N^2(t) + 2N(t)dN(t) + [dN(t)]^2, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$dN^2(t) = 2N(t)dN(t) + [dN(t)]^2. \quad (4.25)$$

O incremento da variância é dado por:

$$d\mathcal{V}[N](t) = \overline{d\langle (a^\dagger a)^2 \rangle} - \overline{dN^2(t)}. \quad (4.26)$$

Por (4.25) temos que:

$$\overline{dN^2(t)} = \overline{2N(t)dN(t)} + \overline{[dN(t)]^2}. \quad (4.27)$$

Pela equação (4.23) e por (2.31) temos:

$$\overline{N(t)dN(t)} = 0. \quad (4.28)$$

Utilizando (4.23), (2.32) e (2.33), temos:

$$\overline{[dN(t)]^2} = 2dt \sum_{s=e,f} |\langle a^\dagger a B_s(a^\dagger a, v) \rangle - \langle B_s(a^\dagger a, v) \rangle N(t)|^2. \quad (4.29)$$

Como temos que  $[(a^\dagger a)^2, a^\dagger a] = 0$  e  $[B_s(a^\dagger a, v), (a^\dagger a)^2] = 0$ ,  $s \in \{e, f\}$ , podemos mostrar, do mesmo modo que  $dN(t)$ , que  $d\langle (a^\dagger a)^2 \rangle$  será função de  $d\xi_s$  e  $d\xi_s^*$ . Logo, por (2.31), temos:

$$\overline{d\langle (a^\dagger a)^2 \rangle} = 0. \quad (4.30)$$

Aplicando (4.30) em (4.26) e (4.28) e (4.29) em (4.27), chegamos ao resultado final:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V}[N](t) = -2 \sum_{s=e,f} |\langle a^\dagger a B_s(a^\dagger a, v) \rangle - \langle B_s(a^\dagger a, v) \rangle N(t)|^2. \quad (4.31)$$

Por (4.31) temos então que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V}[N](t) \leq 0 \forall t, \quad (4.32)$$

só correspondendo à igualdade em um estado de Fock ( $B_s(a^\dagger a, v)|n\rangle = \langle B_s(a^\dagger a, v) \rangle |n\rangle = b_s(n, v)|n\rangle \forall s \in \{e, f\}$ ).

Vale salientar que a única condição imposta sobre os operadores de relaxação para que houvesse um colapso, é que eles comutassem com  $a^\dagger a$ . Logo, qualquer operador de dissipação com essa propriedade, também faria o sistema colapsar em um estado de Fock.

Figure 4.1: Frequência das velocidades dos átomos em 32.000 amostras.

Figure 4.2: Evolução do estado coerente pelo modelo de difusão em uma única realização.

Figure 4.3: Distribuição inicial do campo na cavidade.

Figure 4.4: Estado do campo após a passagem de 50 átomos.



Figure 4.5: Estado do campo após a passagem de 100 átomos.

Figure 4.6: Estado do campo após a passagem de 150 átomos.

Figure 4.7: Evolução da variância do número de fótons em uma realização.

## 4.2 O Método de Monte Carlo

A aplicação do método de Monte Carlo é imediata. Os operadores de relaxação (4.3) e (4.5) e a distribuição de velocidades (4.7) são os mesmos da seção anterior. Consideramos ainda uma cavidade de alto-Q, aonde não há decaimento do campo durante uma realização. A única diferença é que a densidade de probabilidade da variável aleatória agora é uniforme ( $p(r) = 1, \forall r \in [0, 1]$ ). Temos então apenas que aplicar o algoritmo descrito na seção 2.2 para o estado inicial coerente ( $\alpha = \sqrt{5}$ ).

O Hamiltoniano não-Hermitiano (2.12) será dado por:

$$\mathcal{H} = -\frac{i\hbar}{2} \sum_{s=e,f} B_s^\dagger(a^\dagger a, v) B_s(a^\dagger a, v). \quad (4.33)$$

Devido à propriedade (3.44), temos que  $\delta p$  dado por (2.17) é igual ao passo:

$$\delta p = dt. \quad (4.34)$$

Como devemos ter  $\delta p \ll 1$ , o passo  $dt$  fica vinculado a ele.

Se  $r$  for a variável aleatória sorteada, as regras de evolução de  $|\psi(t)\rangle$  para cada passo  $dt$  serão dadas por:

1)  $\delta p < r \implies$  NÃO HÁ “salto quântico”.

$$|\psi(t + dt)\rangle = |\psi(t)\rangle. \quad (4.35)$$

Verifica-se facilmente (4.35) aplicando (4.33) em (2.13) e normalizando. Este resultado é natural, visto que estamos na representação de interação e não há decaimento do campo na cavidade.

2)  $\delta p > r \implies$  HÁ “salto quântico”.

Sorteamos então uma segunda variável aleatória  $s$  para sabermos qual dos dois operadores  $B_s$  aplicaremos:

$$\begin{aligned} \langle B_f^\dagger(a^\dagger a, v) B_f(a^\dagger a, v) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} |b_f(n, v)|^2 |a_n(t)|^2 > s \implies \\ &\implies |\tilde{\psi}(t + dt)\rangle = B_f(a^\dagger a, v) |\psi(t)\rangle, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$|\tilde{\psi}(t + dt)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) b_f(n, v) |n\rangle, \quad (4.37)$$

senão:

$$|\tilde{\psi}(t + dt)\rangle = B_e(a^\dagger a, v)|\psi(t)\rangle, \quad (4.38)$$

$$|\tilde{\psi}(t + dt)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) b_e(n, v) |n\rangle. \quad (4.39)$$

O gráfico mostrado na figura 4.8, para o número médio de fótons em uma realização, foi obtido utilizando o passo  $dt = 0,01$ .

Figure 4.8: Evolução do estado coerente pelo método de Monte Carlo em uma única realização.

O estado de Fock para o qual o campo colapsou foi  $n = 7$ .

A fim de vermos isso com maior clareza, fizemos os gráficos das distribuições, mostrados nas figuras 4.9 a 4.13. Podemos ver também que a variância vai a zero, conforme mostra a figura 4.14.

Todos esses gráficos, tanto na difusão quanto no Monte Carlo, foram feitos para uma realização. Porém e se fizéssemos várias? O que obteríamos? Para verificarmos isso, fizemos 7.000 realizações no Monte Carlo. Obtivemos então o gráfico da frequência dos estados de

Fock finais e o resultado é mostrado na figura 4.15. Observa-se claramente que recuperamos a distribuição de Poisson inicial. Isto era de se esperar, já que a medida é QND e em um *ensemble* de realizações o estado do campo não pode ser alterado.

Figure 4.9: Distribuição inicial do campo na cavidade.

Figure 4.10: Estado do campo após a passagem de 500 átomos.

Figure 4.11: Estado do campo após a passagem de 1.000 átomos.

Figure 4.12: Estado do campo após a passagem de 2.000 átomos.

Figure 4.13: Estado do campo após a passagem de 3.000 átomos.



Figure 4.14: Evolução da variância do número de fótons em uma realização

Figure 4.15: Frequência dos estados finais após 7.000 realizações, utilizando o Monte Carlo.

### 4.3 Análise e Comparação dos Resultados

De um modo geral, ambos os métodos mostraram-se satisfatórios na simulação da medida QND. Tanto no modelo de difusão, quanto no método de Monte Carlo, obtivemos que o estado do campo colapsa para um estado de Fock em **uma** realização (figuras 4.2 e 4.8). Se for feita a média sobre muitas realizações, verifica-se que a distribuição do campo continua sendo Poissoniana (figura 4.15). Há porém algumas diferenças que valem a pena serem ressaltadas.

A mais importante está ligada à implementação dos algoritmos no computador. O método de Monte Carlo é muito mais fácil de se implementar do que o da difusão. Não é difícil ver isso! Basta olhar a expressão (2.29) do modelo de difusão para notarmos que ele exige muito mais contas do que o outro. Como consequência o computador executa muito mais rápido um programa usando o Monte Carlo.

Essa complexidade do modelo de difusão lhe traz, como é visto por alguns (em particular N.Gisin e I.C.Percival), uma vantagem: pode ser deduzido a partir da equação mestra, como foi visto na seção 2.3. Além disso conseguimos provar analiticamente que a variância do número de fótons vai a zero. O mesmo ainda não se conseguiu com o método de Monte Carlo, que possui um caráter mais prático. Outra vantagem do modelo de difusão é que nele o passo  $dt$  não possui nenhum vínculo, enquanto que no Monte Carlo devemos ajustá-lo de modo que tenhamos sempre  $\delta p \ll 1$ . Nota-se também que a convergência é diferente em ambos: no difusão demorou em média 100 átomos, enquanto que no Monte Carlo demorava em média 3.000. A razão disso será vista no próximo capítulo.

Essas são as principais diferenças entre ambos. Não são tão cruciais a ponto de haver um claro favoritismo de uma sobre a outra. A escolha a respeito de qual utilizar acabará dependendo do gosto e da prática da pessoa com relação a cada método. Há porém um caso onde um método poderá ser preferível ao outro! É quando pudermos provar que o processo de medida induz o sistema a evoluir segundo um deles, como no sistema estudado na seção 2.4. Será que isso pode ser provado no caso da medida QND? Esse será um dos pontos a serem discutidos na nossa conclusão.

## Chapter 5

# Conclusão

Vimos em nosso trabalho dois tipos de equações de Schrödinger estocásticas, associadas ao método de Monte Carlo e ao modelo de difusão. Aplicando-os a uma medida QND, pudemos ver como funcionam e analisar os seus resultados. Uma questão final que pode ser colocada é se é possível ou não dar um sentido físico a esses modelos nesse caso.

Para o método de Monte Carlo a resposta é **sim**. Uma realização pode ser entendida como sendo uma seqüência de átomos passando. Após interagirem com o campo na cavidade, um detector mede a velocidade e o estado atômico. Só que o mesmo não possui mais eficiência igual a 1 e sim igual a  $\delta p$  ! A cada átomo medido teremos um “salto” no número médio de fótons, que corresponde a um “salto” de conhecimento a respeito do sistema (átomo + campo). De acordo com a figura (4.8), são necessários 3.000 átomos para termos um estado de Fock. Porém, se levarmos em consideração que a eficiência do detector é  $\delta p$  ( $\delta p = 1/100$  nesse gráfico), então só foram medidos aproximadamente 30 átomos. Este número é da mesma ordem de grandeza do número de átomos calculado no artigo [4] (15 átomos). A diferença deve-se ao fato de que não sabemos exatamente qual foi a dispersão de velocidades utilizada naquela referência.

Porém, para o modelo de difusão, não temos uma resposta definitiva. Talvez haja uma medida que seja feita no sistema, que o faça evoluir dessa maneira, mas também pode ser que não haja. Nesse último caso ele seria apenas um mero algoritmo que nos permitiria evitar estudar a evolução através do operador densidade. Com isso o número de átomos com o qual ele converge não teria nenhuma ligação com a realidade.

Esta última análise, junto com o fato do algoritmo do Monte Carlo ser o mais fácil de se implementar, indica-nos que esse é o método mais indicado para essa medida QND. Nada porém nos garante que em outra medida o contrário não seja verdade! E aí é que está a principal conclusão dessa tese: não há o melhor método; o que há é o mais adequado. Tudo irá depender do processo de medida utilizado.

# Appendix A

## O Método das Trajetórias Quânticas de H.J.Carmichael

O método proposto por H.J.Carmichael possui o mesmo algoritmo de cálculo que o método de Monte Carlo. Há porém uma grande diferença: Carmichael propôs seu método baseado em princípios da teoria da fotodetecção, ao invés de expô-lo apenas como uma ferramenta de cálculo. Isso dá ao método das trajetórias quânticas um embasamento teórico que não havia no Monte Carlo e que consistia em uma desvantagem, pelo menos de ordem estética, com relação ao modelo de difusão. Outro ponto interessante é que a obtenção do seu método, a partir da teoria da fotodetecção, fez com que Carmichael se antecipasse aos resultados de H.M.Wiseman e G.J.Milburn (ítem 2.4). Na referência [14] ele prevê que se fosse utilizado outro processo de medida da radiação, ter-se-ia um conjunto diferente de equações estocásticas. A seguir faremos uma breve exposição desse método baseado nas referências ([24], [14]).

Seja então um sistema ótico que evolui segundo a seguinte equação mestra:

$$\frac{d\rho}{dt}(t) = \mathcal{L}\rho(t). \quad (\text{A.1})$$

A solução formal da equação (A.1) pode ser escrita como:

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}t}\rho(0). \quad (\text{A.2})$$

Suponhamos que estamos monitorando o campo que sai do sistema. Se o reservatório

estiver no estado de vácuo, já vimos que o superoperador de “salto”  $\mathcal{S}$  será dado por (2.56), (2.88):

$$\mathcal{S} = \gamma a \rho a^\dagger. \quad (\text{A.3})$$

onde  $a$  é o operador de aniquilação do sistema e  $\gamma$  é a taxa de decaimento.

Somando e subtraindo (A.3) ao superoperador  $\mathcal{L}$  temos:

$$\frac{d\rho}{dt}(t) = e^{[(\mathcal{L}-\mathcal{S})+\mathcal{S}]t} \rho(0). \quad (\text{A.4})$$

Sabendo-se que a expansão de Dyson generalizada é dada por [14]:

$$e^{[\mathcal{A}+x\mathcal{B}]t} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \int_0^t dt_k \int_0^{t_k} dt_{k-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 e^{\mathcal{A}(t-t_k)} \mathcal{B} e^{\mathcal{A}(t_k-t_{k-1})} \mathcal{B} \dots \mathcal{B} e^{\mathcal{A}t_1}, \quad (\text{A.5})$$

pode-se aplicá-la a (A.4), onde tomamos  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{L} - \mathcal{S}$ ,  $x \equiv 1$  e  $\mathcal{B} \equiv \mathcal{S}$ :

$$\rho(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t dt_k \int_0^{t_k} dt_{k-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})(t-t_k)} \mathcal{S} \dots \mathcal{S} e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})t_1} \rho(0). \quad (\text{A.6})$$

A escolha do superoperador  $\mathcal{S}$  foi arbitrária, mas veremos que ela é fundamental se quisermos dar uma interpretação simples à expressão (A.6). Pela teoria da fotodeteção, sabe-se que a probabilidade de um detector medir, durante um intervalo de tempo  $[0, t]$ ,  $k$  fotoelétrons, com cada deteção ocorrendo nos intervalos disjuntos  $[t_1, t_1 + dt_1], \dots, [t_k, t_k + dt_k] \in [0, t]$ , é dada por:

$$p_k(t_1, \dots, t_k; [0, t]) dt_1 \dots dt_k = Tr[e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})(t-t_k)} \mathcal{S} \dots \mathcal{S} e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})(t_2-t_1)} \mathcal{S} e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})t_1} \rho(0)] dt_1 \dots dt_k, \quad (\text{A.7})$$

na qual foi utilizada a aproximação de Markov nas variáveis do reservatório. As exponenciais representam a evolução do operador densidade até os instantes onde há os colapsos, que são representados pela atuação de  $\mathcal{S}$ . Podemos então considerar os integrandos nas integrais de (A.6) como sendo os operadores densidade condicionados à história das fotodeteções:

$$\tilde{\rho}_c(t) = e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})(t-t_k)} \mathcal{S} \dots \mathcal{S} e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})(t_2-t_1)} \mathcal{S} e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})t_1} \rho(0), \quad (\text{A.8})$$

$$\rho(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t dt_k \int_0^{t_k} dt_{k-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \tilde{\rho}_c(t), \quad (\text{A.9})$$

onde o sinal em (A.8) significa que o operador densidade não está normalizado. A fim de normalizá-lo, multiplicamos e dividimos  $\tilde{\rho}_c$  em (A.9) por (A.7), obtendo:

$$\rho(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t dt_k \int_0^{t_k} dt_{k-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 p_k(t_1, \dots, t_k; [0, t]) \rho_c^{(k; t_1, \dots, t_k)}(t). \quad (\text{A.10})$$

A forma da expressão (A.10) permite-nos dar uma interpretação simples: o operador densidade condicional  $\rho_c(t)$  representa o estado do sistema dada a história das fotodetecções. O operador densidade  $\rho(t)$  será a média de um ensemble de infinitas histórias diferentes (**trajetórias quânticas**), ponderadas pela probabilidade de cada uma ocorrer. Esta decomposição em diversas “trajetórias” assemelha-se às integrais de caminho de Feynman e é o que dá origem ao nome do método.

No caso de um detector perfeito, pode-se fatorar o operador  $e^{(\mathcal{L}-S)t} \rho$  da seguinte forma:

$$e^{(\mathcal{L}-S)t} \rho = e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}t} \rho e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}t}, \quad (\text{A.11})$$

com

$$\mathcal{H} \equiv H_0 - \frac{i\hbar}{2} L^\dagger L, \quad (\text{A.12})$$

$$L = \sqrt{\gamma} a. \quad (\text{A.13})$$

Devido à expressão (A.11), podemos então “abrir”  $\rho_c(t)$  em estados puros  $|\psi_c(t)\rangle$  e com isso acompanhar a “trajetória quântica” de um vetor de estado condicionado ao invés do operador densidade.

Dado  $|\psi_c(t)\rangle, |\psi_c(t+dt)\rangle$  é calculado a partir do seguinte algoritmo:

1) Calculamos a probabilidade de haver um “salto quântico”:

$$p_c(t) = \langle \psi_c(t) | L^\dagger L | \psi_c(t) \rangle dt, \quad (\text{A.14})$$

2) Sorteamos um número aleatório  $\epsilon \in [0, 1]$ ,

3) Se  $p_c(t) < \epsilon \Rightarrow |\psi_c(t+dt)\rangle = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}dt}}{\sqrt{\langle \psi_c(t) | e^{\frac{i}{\hbar} (\mathcal{H}^\dagger - \mathcal{H}) dt} | \psi_c(t) \rangle}}$ , evolução não-unitária,

ou  $p_c(t) > \epsilon \Rightarrow |\psi_c(t+dt)\rangle = \frac{L|\psi_c(t)\rangle}{\sqrt{\langle \psi_c(t) | L^\dagger L | \psi_c(t) \rangle}}$ .

A evolução real do sistema será dada pela média sobre um *ensemble* de “trajetórias quânticas”.



## Appendix B

# O Processo de Wiener e o Cálculo de Itô

O ponto principal desta tese é o estudo das equações de Schrödinger estocásticas. Porém o que vem a ser a palavra “estocástica”? Esse termo provem de **processos estocásticos** que consistem em um conjunto de variáveis aleatórias  $\{X(t), t \in T\}$ , indexadas por um parâmetro  $t \in T$ . O conjunto  $T$  pode ser tanto discreto ( $T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ), quanto contínuo ( $T = \{t | -\infty < t < \infty\}$ ). No nosso caso, os processos estocásticos consistem nas variáveis aleatórias presentes nas equações, aonde o índice  $t$  corresponde ao próprio tempo.

O principal objetivo da teoria dos processos estocásticos é prever, dada uma realização  $\{X(t), t \in T\}$ , qual é a distribuição de probabilidade da variável  $X(t)$ . No caso do método de Monte Carlo, a distribuição é uniforme ( $p(x) = 1 \forall x \in [0, 1]$ ). Já no modelo de difusão o processo estocástico  $\{d\xi_n(t), t \geq 0\}$  é definido como sendo um **processo de Wiener** [35].

A teoria de processos estocásticos deve-se em grande parte aos estudos pioneiros no início do século, de Einstein e outros a respeito do movimento Browniano [36]. O processo de Wiener fornece um modelo para o mesmo e para diversas outras situações (ruído térmico em circuitos elétricos por exemplo) e por isso se constitui de grande importância. É assim chamado após N.Wiener tê-lo aplicado em 1923 no estudo matemático do movimento Browniano [37]. Um processo estocástico  $\{X(t), t \geq 0\}$  é dito ser um processo de Wiener se e somente se satisfaz às seguintes condições: 1)  $\{X(t), t \geq 0\}$  possui incrementos inde-

pendentes e estacionários; Isso quer dizer que dada uma seqüência  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , as variáveis  $X(t_n) - X(t_{n-1}), \dots, X(t_1) - X(t_0)$  são independentes entre si. O fato de serem estacionários quer dizer que,  $\forall \Delta t > 0$  a variável  $X(t_i + \Delta t) - X(t_{i-1} + \Delta t)$  possui a mesma distribuição que  $X(t_i) - X(t_{i-1})$  (não importa a origem do tempo).

2)  $\forall t > 0, X(t)$  possui uma distribuição **Gaussiana**;

3)  $\forall t > 0, \bar{X}(t) = 0$ ;

4)  $X(0) = 0$ .

Devido às propriedades 1 e 4, a distribuição de probabilidade de  $X(t)$  será igual a de  $X(t) - X(s), \forall s < t$ . Como a distribuição é Gaussiana, basta definirmos a sua média e variância para determiná-la unicamente. Temos então que a média é dada por

$$\overline{X(t) - X(s)} = 0. \quad (\text{B.1})$$

Pelas propriedades 3 e 1 pode-se mostrar que  $\exists q^2 > 0$  constante tal que a variância ( $\mathcal{V}$ ) é dada por [35]

$$\mathcal{V}[X(t) - X(s)] = q^2(t - s), \quad t > s \quad (\text{B.2})$$

O cálculo de  $q^2$  deve ser empírico e é característico de cada processo. No caso do modelo de difusão temos  $q^2 = 1/2$ .

Ainda com relação ao estudo do movimento Browniano, em 1908 Langevin [38] propôs a seguinte equação para o estudo de sua dinâmica:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha x(t) + \beta \eta(t), \quad (\text{B.3})$$

onde

$x(t)$ : uma das componentes da velocidade da partícula,

$\alpha > 0, \beta$ : constantes.

O primeiro termo a direita em (B.3) corresponde ao atrito viscoso do meio, enquanto o último representa a força exercida pelas moléculas do fluido. O termo  $\eta(t)$  é denominado “ruído branco” (white noise) [39] e é o que representa o caráter aleatório dessas forças. É um processo **Gaussiano** com média  $\overline{\eta(t)} = 0, -\infty < t < \infty$  e cuja função de correlação é dada por uma função delta de Dirac  $\overline{\eta(t+s)\eta(s)} = \delta(t)$ . Com isso seu espectro é uma constante:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \overline{\eta(s)\eta(s+t)} dt, \quad (\text{B.4})$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \delta(t) dt = \frac{1}{2\pi}, \quad (\text{B.5})$$

de onde deriva o seu nome em analogia com a luz branca, cujo espectro contém todas as frequências visíveis.

Para se resolver a equação diferencial (B.3), os procedimentos usuais do cálculo não são possíveis, tendo em vista a existência da variável aleatória  $\eta(t)$  com comportamento singular (sua função de correlação é uma delta). Para isso foi desenvolvida toda uma nova teoria da qual faz parte o cálculo de Itô [39].

Pode-se mostrar que  $W(t)$  definido por

$$W(t) = \int_0^t \eta(s) ds, \quad (\text{B.6})$$

é um processo de Wiener [40]. Se escrevermos simbolicamente  $dW(t) = \eta(t)dt$ , então podemos colocar (B.3) da seguinte forma:

$$dx(t) = -\alpha x(t)dt + \beta dW(t). \quad (\text{B.7})$$

A equação (B.7) é uma equação diferencial estocástica na forma de Itô. Também pode ser escrita sob a forma de uma equação integral:

$$x(t) = x(0) - \alpha \int_0^t x(s) ds + \beta \int_0^t dW(s). \quad (\text{B.8})$$

A segunda integral em (B.8) não pode ser considerada como sendo do tipo Riemann-Stieltjes, pois o valor de  $W(t)$  depende da escolha dos pontos intermediários das somas aproximadas na definição das integrais. A maneira correta de calculá-la foi introduzida por Itô em 1951 e é dada por ([23], [41]):

$$\int_0^t f(s) dW(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(s_i) [W(s_{i+1}) - W(s_i)]. \quad (\text{B.9})$$

Mais tarde, em 1966, foi proposto por Stratonovich uma outra maneira de se calcular ([23], [42]):

$$\int_0^t f(s) dW(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{f(s_i) + f(s_{i+1})}{2} [W(s_{i+1}) - W(s_i)]. \quad (\text{B.10})$$

Tanto em (B.9) quanto em (B.10) a função  $f(t)$  deve ser não-antecipadora, isto é, não pode depender de  $W(s)$  para  $s > t$  [43]. Isto geralmente ocorre nos sistemas físicos cujo

comportamento não depende de variáveis do futuro. Essa condição é necessária para que as integrais sejam bem definidas. Essas duas definições não são equivalentes e cada uma tem suas vantagens e desvantagens. Como exemplo, a integração de Stratonovich obedece às regras convencionais de cálculo ( $d[W_1(t)W_2(t)]_S = dW_1(t)W_2(t) + W_1(t)dW_2(t)$ ), enquanto que os incrementos de integração de Itô são independentes e o valor médio da integral é sempre zero (isso porque  $f(t)$  é independente de  $dW(t)$ ) [23].

As diferenças entre esses dois métodos foram definidas rigorosamente pelos matemáticos Hudson e Parthasarthy em [44] e vêm sendo amplamente utilizados em ótica quântica ([23], [45], [46], [47]).

## Appendix C

# Derivação dos Operadores $L_1(t)$ e $L_2(t)$

Se considerarmos que  $r$  é o coeficiente de reflexão e  $t$  o de transmissão do espelho  $\epsilon$ , os campos elétricos que chegam aos detectores na figura 2.1 serão dados por:

$$E_3 = rE_1 + tE_2, \quad (\text{C.1})$$

$$E_4 = tE_1 + rE_2. \quad (\text{C.2})$$

Supondo o espelho  $\epsilon$  ideal (a absorção de energia é desprezível), teremos:

$$|E_3|^2 + |E_4|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2. \quad (\text{C.3})$$

Utilizando (C.1) e (C.2) podemos calcular o lado esquerdo da expressão (C.3). Lembrando que  $r$  e  $t$  são complexos, temos:

$$\begin{aligned} |E_3|^2 + |E_4|^2 &= (|r|^2 + |t|^2)|E_1|^2 + (|r|^2 + |t|^2)|E_2|^2 + \\ &+ (rt^* + tr^*)(E_1E_2^* + E_1^*E_2). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Para que tenhamos a expressão (C.3) válida, vemos por (C.4) que devemos ter:

$$|r|^2 + |t|^2 = 1, \quad (\text{C.5})$$

$$rt^* + r^*t = 0. \quad (\text{C.6})$$

Em uma medida balanceada, tem-se  $|r| = |t| = 1/\sqrt{2}$ . Supondo  $r \in \Re$ , temos pela equação (C.6):

$$r = 1/\sqrt{2}, \quad (\text{C.7})$$

$$t = i/\sqrt{2}. \quad (\text{C.8})$$

Com os valores (C.7) e (C.8), as equações (C.1) e (C.2) ficam:

$$E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 + iE_2), \quad (\text{C.9})$$

$$E_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(iE_1 + E_2). \quad (\text{C.10})$$

Substituindo os  $E'$ s pelos campos que eles representam (na representação de interação):

$$E_1 \rightarrow \sqrt{\gamma}a, \quad (\text{C.11})$$

$$E_2 \rightarrow i\sqrt{\gamma}\beta(t), \quad (\text{C.12})$$

$$E_3 \rightarrow L_1(t), \quad (\text{C.13})$$

$$E_4 \rightarrow L_2(t), \quad (\text{C.14})$$

obtemos as expressões (C.9) e (C.10) da seguinte forma:

$$L_1(t) = \sqrt{\frac{\gamma}{2}}[a - \beta(t)], \quad (\text{C.15})$$

$$L_2(t) = i\sqrt{\frac{\gamma}{2}}[a + \beta(t)], \quad (\text{C.16})$$

onde  $\beta(t)$  é dado por (2.96).

# Bibliography

- [1] C.Cohen-Tannoudji, J.Dupont-Roc e G.Grynberg, **Atom-Photon Interactions, Basic Processes and Applications** (Wiley-Interscience Pub., New York, 1992), cap. 4.
- [2] W.Nagourney, J.Sandberge H.Dehmelt, Phys. Rev Lett. **56**, 2797 (1986); Th.Sauter, W.Neuhauser, R.Blatt e P.E.Toschek, *ibid.* **57**, 1696 (1986); J.C.Bergquist, R.G.Hulet, W.M.Itano e D.J.Wineland, *ibid.* **57**, 1699 (1986); E.Peik, G.Hollemann e H.Walther, Phys. Rev. A **49**, 402 (1994).
- [3] N.Gisin, P.L.Knight, I.C.Percival, R.C.Thompson e D.C.Wilson, J. Mod. Opt. **40**, 1663 (1993).
- [4] M.Brune, S.Haroche, J.M.Raimond, L.Davidovich e N.Zagury, Phys. Rev. A **45**, 5193 (1992).
- [5] G.Benson, G.Raithel e H.Walther, Phys. Rev. Lett. **72**, 3506 (1994).
- [6] R.Omnès, **The Interpretation of Quantum Mechanics** (Princeton Series in Physics, New Jersey, 1994), cap.2, p. 81 a 88.
- [7] D.Bohm e J.Bub, Rev. Mod. Phys. **38**, 453 (1966); P.Pearle, Phys. Rev. D **13**, 857 (1976); P.Pearle, Int. J. Theor. Phys. **18**, 489 (1979); N.Gisin, Phys. Rev. Lett. **52**, 1657 (1984); P.Pearle, J. Stat. Phys. **41**, 719 (1985); G-C Ghirardi, A.Rimini e T.Weber, Phys. Rev. D **34**, 470 (1986); L.Diósi, J. Phys. A: Math. Gen.**21**, 2885 (1988); L.Diósi, Phys. Lett. **129A**, 419 (1988); N.Gisin, Helv. Phys. Acta **62**, 363 (1989); G-C Ghirardi, P.Pearle e A. Rimini, Phys. Rev. A **42**, 78 (1990).

- [8] I.C.Percival, Quantum records, **Quantum Chaos, Quantum Measurement** (NATO ASI Serie 357) ed. P.Cvitanovic, I.Percival e A.Wirzbra (Deventer: Kluwer), pp. 199 a 204 (1992).
- [9] N.Gisin e I.C.Percival, J. Phys. A: Math Gen. **25**, 5677 (1992).
- [10] N.Gisin e I.C.Percival, J. Phys. A: Math Gen. **26**, 2233 (1993).
- [11] N.Gisin e I.C.Percival, J. Phys. A: Math Gen. **26**, 2245 (1993).
- [12] J.Dalibard, Y.Castin e K.Mølmer, Phys. Rev Lett. **68**, 580 (1992).
- [13] J.Dalibard, Y.Castin e K.Mølmer, J. Opt. Soc. Am. B **10**, 524 (1993).
- [14] H.J.Carmichael, **An Open Systems Approach to Quantum Optics** (Springer-Verlag, Berlin, 1993), cap.7.
- [15] B.M.Garraway e P.L.Knight, Phys. Rev. A **50**, 2548 (1994).
- [16] B.M.Garraway e P.L.Knight, Phys. Rev. A **49**, 1266 (1994).
- [17] A.Imamoğlu, Phys. Rev. A **48**, 770(1993).
- [18] A.Imamoğlu e L.You, Phys. Rev. A **50**, 2642 (1994).
- [19] P.Marte, R.Dum, R.Taïeb, P.D.Lett e P.Zoller, Phys. Rev. Lett. **71**, 1335 (1993).
- [20] R.Dum, P.Zoller e H.Ritsch, Phys. Rev. A **45**, 4879 (1992).
- [21] G.Lindblad, Commun. Math. Phys. **48**, 119 (1976).
- [22] H.M.Wiseman e G.J.Milburn, Phys. Rev. A **47**, 1652 (1993).
- [23] C.W.Gardiner, A.S.Parkins e P.Zoller, Phys. Rev. A **46**, 4363 (1992).
- [24] H.M.Wiseman e G.J.Milburn, Phys. Rev. A **47**, 642 (1993).
- [25] Referência [14], cap. 9, p.149.
- [26] V.B.Braginsky e Y.I.Vorontsov, Usp. Fiz. Nauk. **114**, 41 (1974); Sov. Phys. -Usp. **17**, 644 (1975).



- [27] C.M.Caves, K.S.Thorne, R.W.D.Drever, V.D.Sandberg e M.Zimmerman, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 341 (1980).
- [28] N.Imoto, H.A.Haus e Y.Yamamoto, *Phys. Rev. A* **32**, 2287 (1985); M.D.Levenson, R.M.Shelby, M.Reid e D.F.Walls, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2473 (1986); N.Imoto, S.Watkins e Y.Sasaki, *Opt. Commun.* **61**, 159 (1987); A.LaPorta, R.E.Slusher e B.Yurke, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 28 (1989); P.Grangier, J.F.Roch e G.Roger, *ibid.* **66**, 1418 (1991).
- [29] M.Brune, S.Haroche, V. Lefèvre, J.M.Raimond e N.Zagury, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 976 (1990).
- [30] S.Haroche, **New Trends in Atomic Physics, Les Houches Summer School Session XXXVIII**, editado por G.Grynberg e R.Stora (North-Holland, Amsterdam, 1984); S.Haroche e J.M.Raimond, **Advances in Atomic and Molecular Physics vol.XX**, editado por D.R.Bates e B.Bederson (Academic, New York, 1985).
- [31] N.F.Ramsey, **Molecular Beams** (Oxford University Press, New York, 1985).
- [32] R.G.Hulet e D.Kleppner, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1430 (1983); A.Nussenzweig, J.Hare, A.M.Steinberg, L.Moi, M.Gross e S.Haroche, *Europhys. Lett.* **14**, 755 (1991).
- [33] G.Rempe, F.Schmidt-Kaler e H.Walther, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2783 (1990).
- [34] F.Reif, **Fundamentals of Statistical and Thermal Physics** (McGraw-Hill book Company, 1985), cap. 7, pp. 273 e 274.
- [35] E.Parzen, **Stochastic Processes** (Holden-Day Inc. 1964), cap. 1, pp. 27 a 29.
- [36] A.Einstein, **Investigations on the theory of the Brownian movement** (New York, Dover, 1956), contém traduções dos artigos originais de Einstein de 1905.
- [37] N.Wiener, *J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.* **2**, 131 (1923); *Acta. Math.* **55**, 117 (1930).
- [38] P.Langevin, *C. R. Acad. Sci., Paris* **146**, 530 (1908).
- [39] L.Arnold, **Stochastic Differential Equations: theory and applications** (A Wiley-Interscience Pub. 1974), caps. 3 e 4.

- [40] Referência [39] p. 53.
- [41] K.Itô, **On Stochastic Differential Equations** (New York, Amer. Math. Soc. 1951).  
Memoirs, Amer. Math. Soc., No. 4.
- [42] R.L.Stratonovich, SIAMJ. Control **4**, 362 (1966).
- [43] Referência [39], cap. 4, p. 61.
- [44] R.Hudson e K.R.Parthasarthy, Commun. Math. Phys. **93**, 301 (1984).
- [45] M.J.Collet e C.W.Gardiner, Phys. Rev. A **30**, 1386 (1984).
- [46] C.W.Gardiner e M.J.Collet, Phys. Rev. A **31**, 3761 (1985).
- [47] A.Barchielli e G.Luperi, J. Math. Phys. **26**, 2222 (1985); A.Barchielli, Quantum Opt.  
**2**, 423 (1990).